

9 Selbstinduktion

Übersicht:

Die Selbstinduktion einer Spule **verzögert** das **Anwachsen** und das **Abnehmen** der Stromstärke in der Spule.

Für die **Selbstinduktionsspannung** gilt:

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

ΔJ : Änderung der Stromstärke J in der Zeit Δt

L : Induktivität

Einheit für L :

$$1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

$$H = \frac{J \cdot N}{l}, H = \text{const.}$$

(magnetische Feldstärke)

$$F = B \cdot J \cdot l$$

(B : magnetische Flußdichte)

$$B = \mu_0 H$$

(Grundgleichung des magn. Feldes)

$$F = B \cdot Q \cdot v$$

(Lorentzkraft)

$$\phi = B \cdot A_n$$

(magnetischer Fluß)

$$U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

$$U_{\text{ind}} = -B \cdot l \cdot v$$

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

(Induktionsgesetze)

$$L = \frac{N^2 \cdot A_n \cdot \mu_0}{l}$$

(Induktivität)

$$E_m = \frac{1}{2} L \cdot J^2$$

(magnetische Energie)

9.0 Vorübung

In einem Verbraucher mit Ohm'schem Widerstand gilt für jeden Momentanwert einer angelegten Wechselspannung das Ohm'sche Gesetz $U = R \cdot J$, $R = \text{const.}$ Legen wir z. B. eine »Rechteckspannung« an den Ohm'schen Widerstand so fließt nach Beginn eines Impulses der Strom sofort in voller Stärke und mit dem Impulsende hört auch der Stromfluß auf. Auch wenn wir statt des Widerstandes eine Spule an die Rechteckspannung anschließen, könnten wir zunächst ein ähnliches Verhalten des Stromes erwarten. Möglicherweise verursacht allerdings das Magnetfeld der stromdurchflossenen Spule eine Rückwirkung. Es durchsetzt ja auch die Drahtwindungen der felderzeugenden Spule. Falls dabei eine Induktionswirkung auftritt, befolgt sie die **Regel von Lenz**:

Der induzierte Spannungsstoß erzeugt in einem geschlossenen Stromkreis einen Stromstoß, dessen Magnetfeld der induzierenden Feldänderung entgegenwirkt. Das Lenz'sche Gesetz ist ein Teil des Induktionsgesetzes. Es enthält eine Aussage über die Richtung des Induktionsstroms bzw. der Induktionsspannung in Abhängigkeit von den gegebenen Versuchsbedingungen. Beachten Sie, daß in der obenstehenden Formulierung von zwei wohl zu unterscheidenden Magnetfeldern die Rede ist: einmal von dem sich ändernden Magnetfeld, das die Ursache der Induktionsspannung in einem Leiter ist; zweitens von dem Magnetfeld des Induktionsstroms.

Wenn die Induktionsspannung durch eine mechanische Relativbewegung zwischen einem Magneten und einer Leiterschleife (Spule) erzeugt wird, formulieren wir das Lenz'sche Gesetz so:

Der induzierte Spannungsstoß erzeugt in einem geschlossenen Stromkreis einen Stromstoß, der die mechanische Bewegung des Magneten (der Spule) durch sein magnetisches Feld hemmt.

Dazu ein Versuch zur Bestätigung dieser Regel:

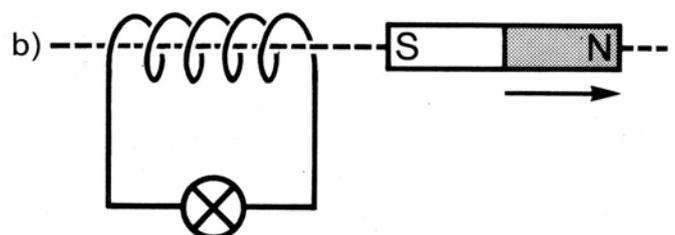
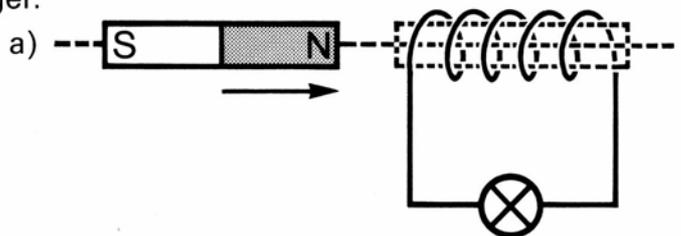
Bewegen wir den Magneten in die Spule hinein, so zeigt das Lämpchen den während der Bewegung induzierten Stromstoß an. Der Induktionsstrom baut um die Spule ein Magnetfeld auf, dessen Struktur der eines Stabmagneten ähnlich ist. Die beiden

»Stabmagnete« stoßen sich ab; die ursprüngliche Bewegung wird gehemmt. Nachdem wir wissen, daß sich die beiden Nordpole gegenüberstehen, können wir auch mit Hilfe der Faustregeln für Spulen die Richtung des induzierten Stromes angeben.

Bewegen wir den Magneten durch die Spule hindurch und am anderen Ende von dieser wieder weg (s. Zeichnung), so bildet sich am rechten Spulenende ein Nordpol. Spule und Stabmagnet ziehen sich an; auch in diesem Fall wird die ursprüngliche Bewegung gehemmt. Die Stromrichtung ist jetzt entgegengesetzt zu der bei a).

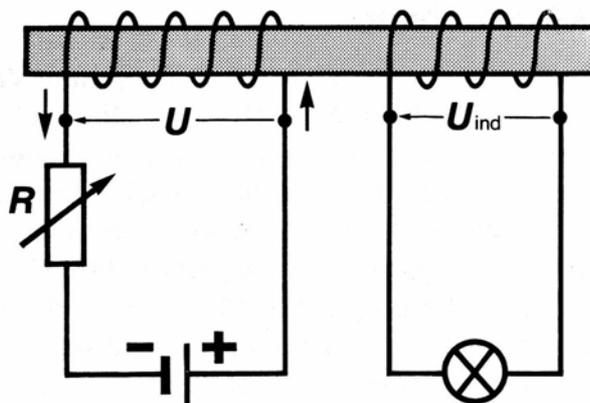
Nun betrachten wir den Fall, daß die Induktionsspannung durch eine Magnetfeldänderung zwischen feststehenden Spulen zustande kommt. Hier kann die Lenz'sche Regel auch folgenden Wortlaut haben:

Die durch die Feldänderung hervorgerufene Induktionsspannung ist so gerichtet, daß der Induktionsstrom die Feldänderung verzögert.



Dazu wieder ein Versuch:

Die Induktionsspule wurde neben die Feldspule im selben Sinn auf einem gemeinsamen Eisenkern gewickelt. Wenn wir den Schiebewiderstand R verändern, ändern sich die Stromstärke in der Feldspule sowie der magnetische Fluß im Eisenkern. Der magnetische Fluß durchsetzt die Induktionsspule, es tritt eine Induktionsspannung auf. Wir unterscheiden folgende Phasen:



a) R nimmt zu \Rightarrow die Spannung U an der Feldspule nimmt ab $\Rightarrow \Delta J < 0 \Rightarrow \Delta \phi < 0$

Nach der Lenz'schen Regel soll der Induktionsstrom die Abnahme des magnetischen Flusses durch die Überlagerung der Felder verzögern.

Dies ist der Fall, wenn am linken Ende der Induktionsspule ein Südpol, am rechten Ende ein Nordpol gebildet wird. Schaut man in diesem Falle von rechts auf den Stabmagneten, so fließt der Induktionsstrom im Gegenuhrzeigersinn.

Die induzierte Spannung ist im selben Sinn gerichtet wie die Spannung an der Feldspule.

b) R nimmt ab $\Rightarrow U$ nimmt zu $\Rightarrow \Delta J > 0 \Rightarrow \Delta \phi > 0$

Das Magnetfeld des Induktionsstroms beeinflusst das der Feldspule jetzt so, daß die Zunahme des magnetischen Flusses verlangsamt wird. Am linken Ende der Induktionsspule bildet sich ein Nordpol.

Die induzierte Spannung ist entgegengesetzt zu der Spannung an der Feldspule gerichtet.

Dieser Sachverhalt wird im Induktionsgesetz berücksichtigt: $U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$

$$\Delta \phi < 0 \Rightarrow U_{\text{ind}} \Delta t > 0 \quad (\text{so gerichtet wie } U)$$

$$\Delta \phi > 0 \Rightarrow U_{\text{ind}} \Delta t < 0 \quad (\text{entgegengesetzt gerichtet zu } U)$$

9.1 Die Selbstinduktion

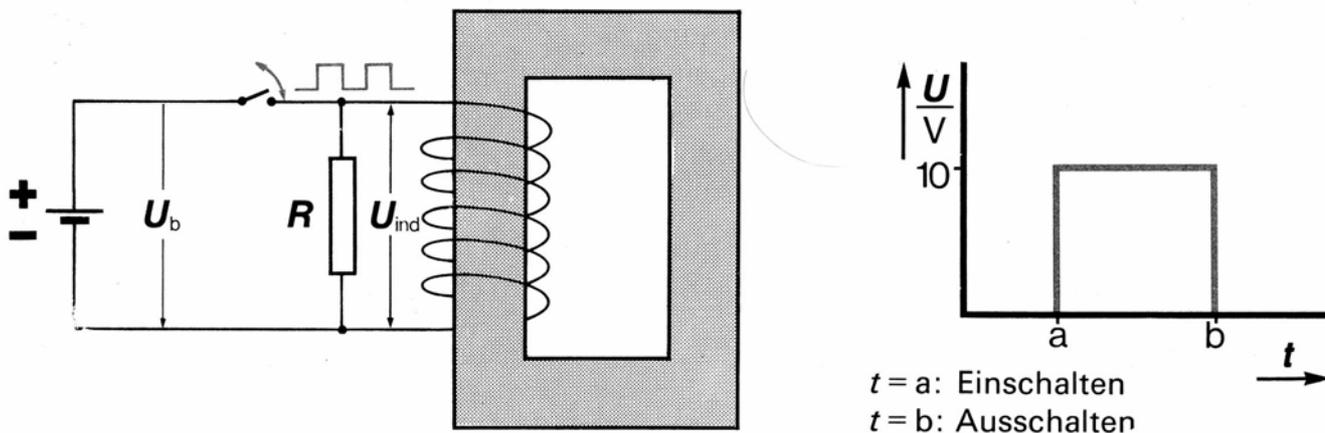
Befindet sich eine Spule mit großer Windungszahl im Gleichstromkreis (Stromquelle mit kleiner Spannung), so kann man beim Unterbrechen des Gleichstroms am Schalter Funken beobachten. Sie müssen wegen ihrer Länge und Intensität von einer höheren Spannung herrühren, als sie die Gleichstromquelle erzeugt. Solche Funken treten beispielsweise an Unterbrecherkontakten von Klingeln, an Relaiskontakten oder an den Kommutatoren von Gleichstrommotoren auf. Es liegt die Erklärung nahe, daß diese hohe »Sekundärspannung« durch Induktion in der Feldspule beim Zusammenbruch des magnetischen Feldes entsteht. Man bezeichnet diese Erscheinung als **Selbstinduktion**, denn die Induktionsspannung wird in der Feldspule selbst hervorgerufen.

Im folgenden wollen wir diese Art von Induktion genauer untersuchen und insbesondere die Frage klären, ob die Selbstinduktion auch beim Einschalten, also beim Aufbau des Feldes, zu beobachten ist.

9.2 Zur Theorie der Selbstinduktion

In einem Stromkreis befindet sich eine Spule mit geschlossenem rechteckigen Eisenkern. Parallel zur Spule liegt ein Widerstand R . Durch regelmäßiges Betätigen des Schalters werden Spannungsimpulse (Spannungstöße) an die Enden der Spule gelegt bzw. Stromimpulse (Stromstöße) durch die Spule fließen.

Darstellung eines Spannungsimpulses



Nach dem Induktionsgesetz tritt bei der Änderung des magnetischen Flusses in jeder den magnetischen Fluß umfassenden Spule eine Induktionsspannung auf. Sie ist um so höher, je größer die Windungszahl ist und je schneller die Flußänderung erfolgt. Von **Selbstinduktion** sprechen wir dann, wenn wir die Induktionsspannung an derselben Spule meinen, die auch für die Flußänderung verantwortlich ist (also die Feldspule). In unserem Fall erwarten wir bei einem Spannungsimpuls ($U \cdot \Delta t$) zweimal das Auftreten einer Induktionsspannung, nämlich beim Einschalten und beim Ausschalten. Induktionsspannung und angelegte Spannung addieren sich in jedem Zeitpunkt, es gilt für die resultierende Spannung

$$U_{ges} = U + U_{ind}$$

Nach der Lenz'schen Regel ist die Selbstinduktionsspannung so gerichtet, daß der vor der Feldänderung bestehende Zustand des Feldes erhalten bleibt. Demnach müssen wir zwischen folgenden zeitlichen Phasen unterscheiden:

1. Impulsbeginn (Einschalten)

Die induzierte Spannung verursacht durch ihre Wirkungen den Aufbau des magnetischen Feldes zu verhindern. Daher muß sie gegen die angelegte Spannung gerichtet sein. Die resultierende Spannung (und damit der Spulenstrom) steigt verzögert an und nähert sich langsam ihrem Endwert. Je weiter der Aufbau des magnetischen Feldes vorangeschritten ist, desto langsamer nimmt der Strom J zu, desto kleiner wird U_{ind} . Zusammenfassend schreiben wir:

Beim Einschalten gilt: $\frac{\Delta \phi}{\Delta t} > 0 \Rightarrow U_{ind} < 0 \Rightarrow U_{ges} = U - U_{ind}$ steigt langsam an.

2. Impulsmitte

Hat die resultierende Spannung den Wert U erreicht, dann ist das magnetische Feld voll aufgebaut. Der magnetische Fluß ändert sich nicht mehr.

Es gilt: $\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = 0 \Rightarrow U_{ind} = 0 \Rightarrow U_{ges} = U = \text{const.}$

3. Impulsende (Ausschalten)

Hier tritt eine Induktionsspannung auf, die den Abbau des magnetischen Feldes verzögert. Die Unterbrechung des Stromes wird hinausgezögert, daher hat U_{ind} dieselbe Richtung wie U . Da beim Ausschalten $U = 0$ wird, gilt für jeden Zeitpunkt danach: $U_{\text{ges}} = +U_{\text{ind}}$. Wir müssen je nach Größe des parallel liegenden Widerstandes unterscheiden:

- a) Ist R klein, sinkt U_{ges} allmählich auf 0 ab.
- b) Ist R groß (oder ist kein Widerstand parallel geschaltet), dann entsteht wegen $U \sim R$ kurzzeitig eine hohe Induktionsspannung.

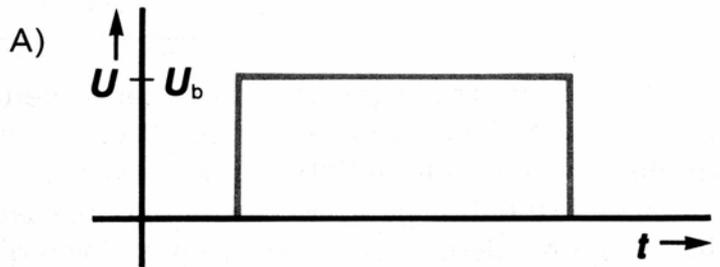
Sie ist die Ursache des sog. Öffnungsfunkens am Schalter.

Zusammenfassend schreiben wir:

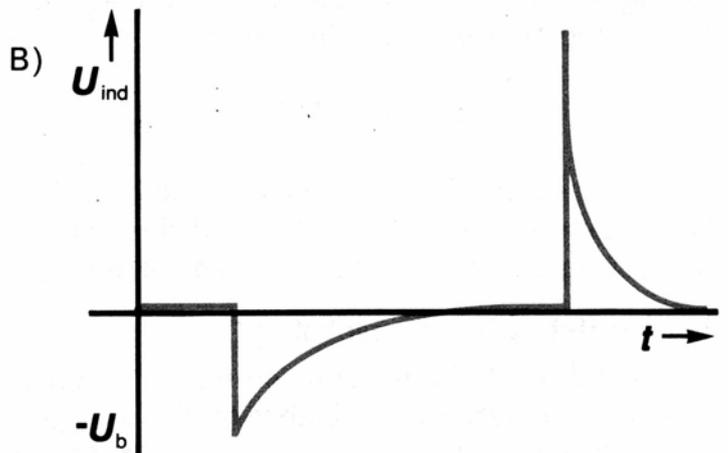
Beim Ausschalten gilt: $\frac{\Delta\phi}{\Delta t} < 0 \Rightarrow U_{\text{ind}} > 0 \Rightarrow U_{\text{ges}} = U_{\text{ind}}$ nimmt ab

Aus diesen Überlegungen können wir den qualitativen Verlauf der resultierenden Spannung an der Spule und den des Stromes durch die Spule ableiten (für den Fall eines kleinen Widerstandes R) (U_b : Batteriespannung).

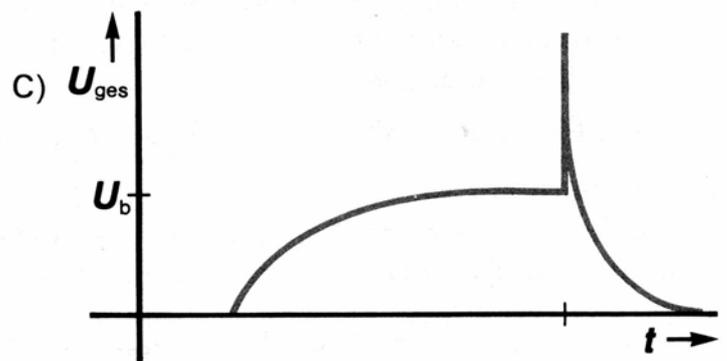
A)
Rechteckimpuls (hinter dem Schalter, am Widerstand R bzw. an der Spule)



B)
 $|U_{\text{ind}}|$ ist beim Ausschalten wegen der größeren Änderungsgeschwindigkeit $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ größer.

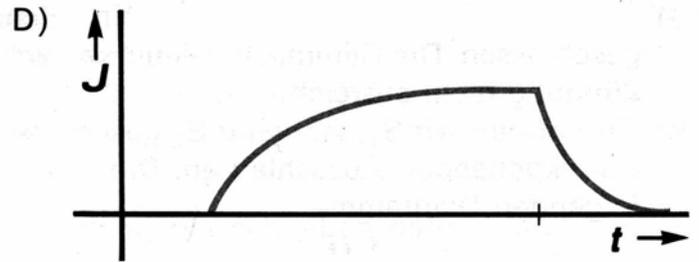


C)
 $U_{\text{ges}} = U + U_{\text{ind}}$ (Diese Kurve entsteht durch Addition der Kurven bei A und B über das interessierende Zeitintervall)



D)

$$J \sim \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} \quad R_{\text{ges}} \text{ ist nicht konstant}$$

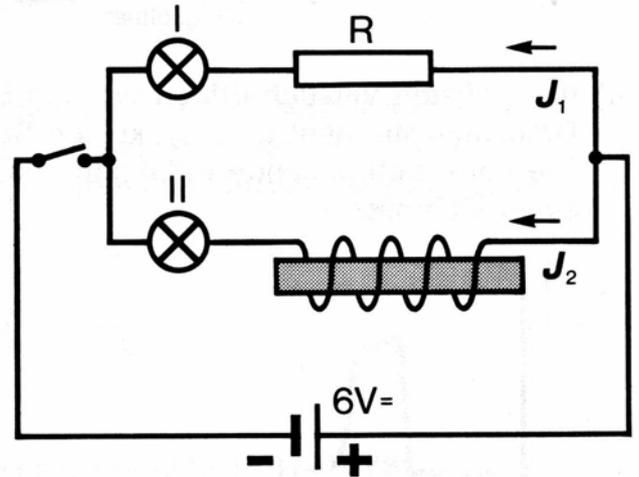


9.3 Versuche zur Bestätigung der Theorie

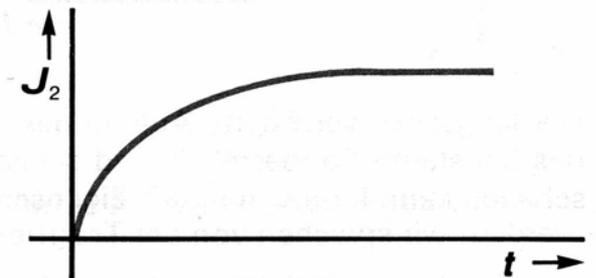
9.3.1 Das am Ende von 9.2 stehende Diagramm für den Verlauf von J (Kurve D) kann am Kathodenstrahloszillographen direkt beobachtet werden.

Nicht nur Spulen, sondern auch andere beliebige Leiteranordnungen haben eine Induktivi-

9.3.2 Im oberen Teil des verzweigten Stromkreises fließt der Strom durch die Lampe I und den Widerstand, im unteren Teil durch die Lampe II und die Spule. Der Drahtwiderstand der Spule und der Widerstand R haben etwa dieselbe Größe. Die konstante Stromstärke muß dann in jedem Zweig gleich groß sein. Beim Einschalten bemerken wir jedoch, daß die Lampe I sofort hell aufleuchtet, während II erst nach einigen Sekunden die volle Lichtstärke erreicht. Die Ursache dieser Verzögerung erklären wir durch den Einfluß der Selbstinduktionsspannung im Spulenzweig.



Stromverlauf im Spulenzweig



9.3.3 Im Schaltbild des Versuchsaufbaus bedeuten:

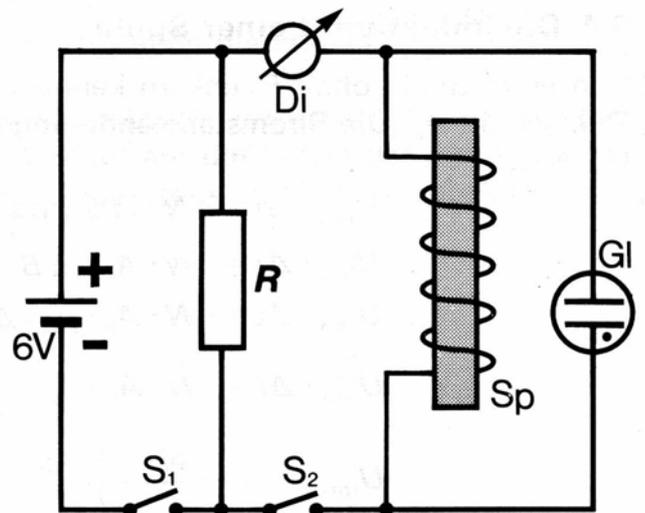
S_1, S_2 : Schalter

R : Widerstand mit kleinem Ohmwert

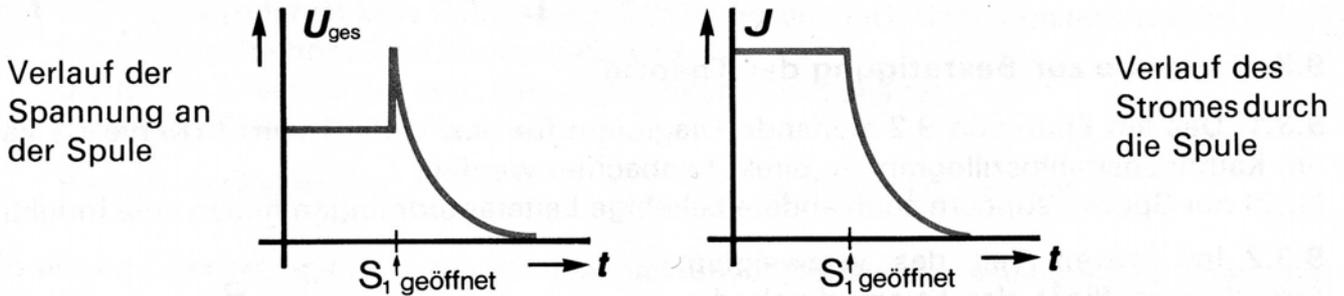
Gl : Glimmlampe (unterhalb der Zündspannung (ca. 100 V) sehr großer Widerstand, nach Zündung kleiner Widerstand)

Sp : Spule mit vielen Windungen und Eisenkern

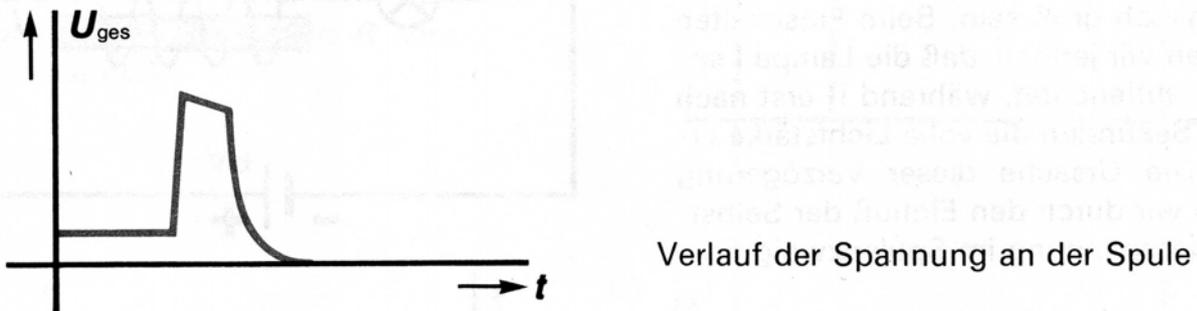
Di : Drehspulmeßinstrument zur Stromanzeige



- a) Überlegen Sie sich den Stromlauf im Schaltbild! Zunächst seien die beiden Schalter geschlossen. Die Glimmlampe leuchtet nicht, denn an ihr liegt die Spannung 6 V, die zur Zündung nicht ausreicht.
- b) Nun öffnen wir S_1 , während S_2 geschlossen bleibt: Das Meßgerät zeigt einen langsam zurückgehenden Ausschlag an. Die Glimmlampe leuchtet nicht. Dem entsprechen die folgenden Diagramme:



- c) Im nächsten Versuch öffnen wir den Schalter S_2 (S_1 kann geschlossen bleiben). Das Drehspulinstrument DI zeigt keinen Strom an, da der Stromkreis unterbrochen wurde. Die hohe sich bildende Induktionsspannung zündet die Glimmlampe, wir beobachten einen Lichtblitz.



Der langsame, verzögerte Aufbau des Magnetfeldes beim Einschalten des Stromes, dann das konstante Fortbestehen und schließlich der verzögerte Abbau des Feldes beim Abschalten kann formal mit der Eigenschaft der Massenträgheit in der Mechanik verglichen werden; wir sprechen von der **Trägheit des Magnetfeldes**.

9.4 Die Induktivität einer Spule

Von einer Spule ohne Eisenkern kennen wir die Länge l , die Windungszahl N und den Querschnitt A_n . Die Stromstärkeänderung in der Zeit Δt betrage ΔJ ($\Delta J = J_2 - J_1$). Dann ist:

$$U_{\text{ind}} \cdot \Delta t = -N \cdot \Delta \phi \quad (\text{Induktionsgesetz})$$

$$U_{\text{ind}} \cdot \Delta t = -N \cdot A_n \cdot \Delta B \quad (\phi = B \cdot A_n)$$

$$U_{\text{ind}} \cdot \Delta t = -N \cdot A_n \cdot \mu_0 \cdot \Delta H \quad (B = \mu_0 H)$$

$$U_{\text{ind}} \cdot \Delta t = -N \cdot A_n \cdot \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot \Delta J \quad (H = \frac{N \cdot J}{l})$$

$$U_{\text{ind}} = - \frac{N^2 \cdot A_n \cdot \mu_0}{l} \cdot \frac{\Delta J}{\Delta t} \quad (\text{da die Feldspule gleich der Induktionsspule ist})$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Selbstinduktionsspannung proportional zur Änderungsgeschwindigkeit des elektrischen Stroms durch die Spule ist.

$$U_{\text{ind}} \sim - \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

Die Größe $\frac{N^2 \cdot A_n \cdot \mu_0}{l}$ ist der Proportionalitätsfaktor, wir schreiben dafür L und nennen sie **Induktivität der Spule**.

$$L = \frac{N^2 A_n}{l} \cdot \mu_0 \quad (43) \quad \text{Induktivität}$$

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

Die Größe L hängt nur von Abmessungen und Windungszahl der Spule und von dem umgebenden Medium ab. Sie kann als »Kenngröße« einer Spule gewertet werden. Je größer die Induktivität L ist, desto höher ist die bei einer bestimmten Stromänderung auftretende Selbstinduktionsspannung.

Einheit der Induktivität:

$$\text{Aus } L = - \frac{U_{\text{ind}}}{\frac{\Delta J}{\Delta t}} \Rightarrow [L] = \frac{1 \text{ V}}{\frac{1 \text{ A}}{1 \text{ s}}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

Man schreibt für $1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ H}$ (Henry, amerikanischer Physiker 1797–1878)

Kleinere Einheiten $1 \text{ Millihenry} = 1 \text{ mH} = \frac{1}{1000} \text{ H}$

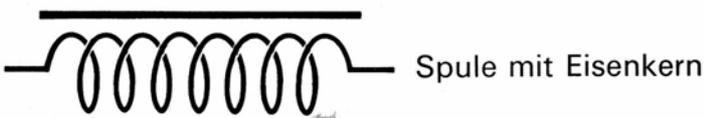
$$1 \text{ Mikrohenry} = 1 \mu\text{H} = \frac{1}{1000} \text{ mH}$$

Eine Spule hat die Einheit 1 H , wenn in ihr bei einer Änderung der Stromstärke von 1 A in 1 s eine Induktionsspannung von 1 V erzeugt wird.

Nicht nur Spulen, sondern auch andere beliebige Leiteranordnungen haben eine Induktivität. Zur Bestimmung von L kann dann allerdings nicht mehr die Formel $L = \frac{N^2 \cdot A_n \cdot \mu_0}{l}$ herangezogen werden.

Haben Spulen einen Eisenkern, so muß die Formel für L noch um einen Faktor μ_r erweitert werden, denn der Eisenkern hat einen starken Einfluß auf die Größe der Induktivität der Spule (μ_r ist die »Materialkonstante« des verwendeten Eisens und liegt in Tabellen vor).

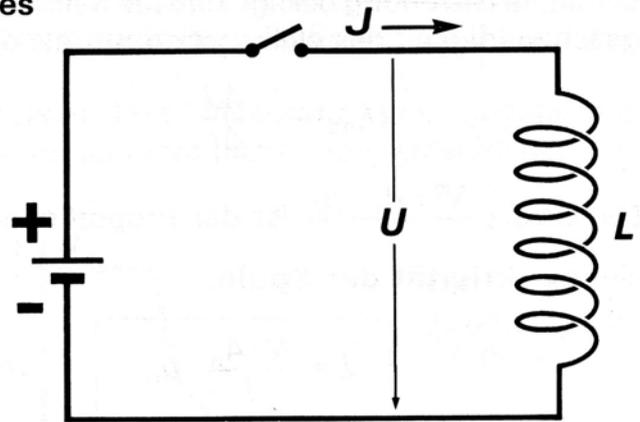
Im folgenden verwenden wir die Schaltzeichen:



9.5 Energie des elektromagnetischen Feldes

Betrachten wir einen Stromkreis, der aus einer Stromquelle, einem Schalter und einer Feldspule mit der bekannten Induktivität L besteht.

Die Stromarbeit in einem kleinen Zeitabschnitt während des Feldaufbaus kann nach der Formel $W = U \cdot J \cdot \Delta t$ berechnet werden. J ist die mittlere Stromstärke während der Zeit Δt .



Ein Teil der Stromarbeit wird am Widerstand R des Spulendrahtes in Wärme umgewandelt (ΔE_w). Der andere Teil der Stromarbeit wird als magnetische Feldenergie gespeichert (ΔE_m). Es ist $W = \Delta E_w + \Delta E_m$.

Wir nehmen an, der Wärmeanteil ΔE_w sei vernachlässigbar klein. Dann gilt $W \approx \Delta E_m$, d. h. die Stromarbeit beim Einschalten wird nahezu restlos zum Aufbau des Magnetfeldes gebraucht. Mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung läßt sich aus dem Induktionsgesetz eine Formel zur Berechnung der gesamten magnetischen Feldenergie E_m herleiten.

Es gilt:

$$E_m = \frac{1}{2} L J^2 \quad (44)$$

L : Induktivität der Spule

J : Die Stärke des nach dem Einschaltvorgang fließenden konstanten Stromes

Ist das Magnetfeld der Spule voll aufgebaut, so wird keine Arbeit mehr zur Erhaltung des Feldes benötigt.

Beim Zusammenbruch des Feldes verwandelt sich die Feldenergie wieder in Stromarbeit.

Beispiel:

Man berechne die Energie des magnetischen Feldes einer Spule der Induktivität 2,8 mH, wenn ein Strom von 0,50 A durch sie fließt!

Lösung:

$$L = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ H}, J = 0,5 \text{ A}, E_m = ?$$

$$E_m = \frac{1}{2} L J^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 2,8 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 0,25 \text{ A}^2$$

$$E_m = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ VAs} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$