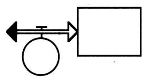
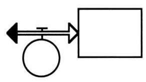
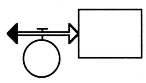
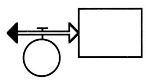
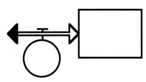
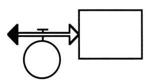
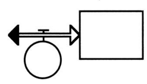
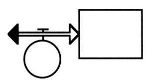
Simulation - experimentelle Mathematik-

Simuliert wird ein realen Bewegungsablauf an Hand eines Modells. Die Modellbildung ist die Voraussetzung der Simulation. Sie bildet quasi die Hardware. Die Modellbildung erfolgt gleichzeitig mit einer Begriffsbildung (Software). Das Modell wird beschrieben durch Begriffe, den Konstruktoren (z.B. v, Geschwindigkeit; a Beschleunigung m, Masse usw.) und den Methoden, Formeln (z.B. p=mv; F=p/t).

Eine Einteilung der Begriffe in zwei Begriffstypen, der *Zustansgrößen* (Bestand, Momentaufnahme) und den *Flussgrößen* (Stärke der Änderung, Rate) erlaubt eine übersichtlich Einteilung der Begriffe.

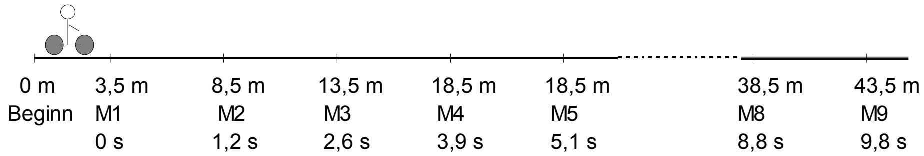
Änderungsrate	**Symbol**	**Zustand**	**Beispiel**
Geschwindigkeit $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	s  v	Ort (ggf. Komponente) $s_{(t)}=s_{(t-\Delta t)}+v_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	geradlinige und gekrümmte Bewegungen (in Komponenten) z.B. Wurf
Beschleunigung $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$	v  a	Geschwindigkeit (ggf. Komponente) $v_{(t)}=v_{(t-\Delta t)}+a_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	geradlinige und gekrümmte Bewegungen (in Komponenten) z.B. freier Fall
Winkel-geschwindigkeit $\omega=\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$	alpha  omega	Drehwinkel $\alpha_{(t)}=\alpha_{(t-\Delta t)}+\omega_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	Drehbewegungen z.B. Fadenpendel
Kraft $F=\frac{\Delta p}{\Delta t}$	p  F	Impuls (ggf. Komponente) $p_{(t)}=p_{(t-\Delta t)}+F_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	Impulsänderungen durch beliebige Kräfte
Leistung $P=\frac{\Delta W}{\Delta t}$	W  P	Energie $W_{(t)}=W_{(t-\Delta t)}+P_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	Energieflüsse (mechanisch, elektrisch usw.)
Stromstärke $I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$	Q  I	elektrische Ladung $Q_{(t)}=Q_{(t-\Delta t)}+I_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	Ladungsänderung z.B. Kondensatorladung / -entladung
Strom-änderung $\dot{I}=\frac{\Delta I}{\Delta t}$	I  I_Punkt	Stromstärke $I_{(t)}=I_{(t-\Delta t)}+\dot{I}_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	Ein- und Ausschalten des Spulenstroms, z.B. $\dot{I}=-\frac{R\cdot I}{L}$
Aktivität $A=\frac{\Delta N}{\Delta t}$	N  A	Kern-Anzahl (Mutterkerne bzw. Tochterkerne) $N_{(t)}=N_{(t-\Delta t)}+A_{(t-\Delta t)}\cdot\Delta t$	Radioaktive Zerfallsprozesse

norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl

1. Experiment und Simulation in der KINEMATIK

(am Beispiel eines Radfahrers)

Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit vom Beginn der Strecke über den Startpunkt S an den Marken M1 bis M9, die im gleichen Abstand Δs=5m an der Strecke angebracht sind vorbei An jeder Marken wird die Zeit, die zwischen Passieren des Radfahrers am S-Punkt bis zum Passieren der Marke M1,M2,...vergeht, gestoppt.



Die Modell/Begriffsbildung (Vereinbarungen) für dieses Experiment lautet: Der Weg – Zeit Verlauf für eine gradlinige, gleichförmige (konstante Bewegung) ist zu ermitteln.

Gemessen wird die Zeit t in Sekunden, die ein Körper (Radfahrer) braucht vom Start-Punkt bis zu den einzelnen Wegmarken M12, M3,... Die Marken sind auf gerader Linie in gleich Abständen angeordnet.

Konstuktoren des Modells:

zurückgelegte **Strecke s in Meter m** auf gerader Linie und

die mit der Stoppuhr gemessene **Zeit t in Sekunden**

Methoden des Modells:

Zur Überprüfung der Konstanz einer gradlinigen Bewegung wird der abgeleitete Begriff Geschwindigkeit als Quotient aus zurückgelegter Strecke und der dabei verstrichenen Zeit verwendet. Er dient der Vergleichbarkeit gradliniger Bewegungen.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Δs ist der Abstand der Marken (Differenz von z.B. M1 und M2) und Δt die dabei verstrichene Zeit

Daten aus dem Experiment:

z.B für die Marke M2: Δs = Strecke(Beginn bis M2) – Strecke(Beginn bis Start)

Δs = 8,5 Meter – 3,5 Meter = 5 Meter

Die dabei an der Marke M2 gemessene Zeit beträgt t=1,2 Sekunden. Der Radfahrer durchfährt die Streckendifferenz zwischen den Marken M1 und M2 in

Δt= 1,2 s – 0 s = 1,2 s.

Das ergibt eine Geschwindigkeit von **v = 5m/1,2s = 4,1 m/s**

Für die Marke M3: Δs = 13,5 Meter – 8,5 Meter = 5 Meter und

Δt= 2,6 s – 1,2 s = 1,4 s ergibt **v = 5m/1,4s = 3,6 m/s.**

Die Daten, die das Experiment liefert sind in der Tabelle aufgelistet. Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Radfahrers

Experiment

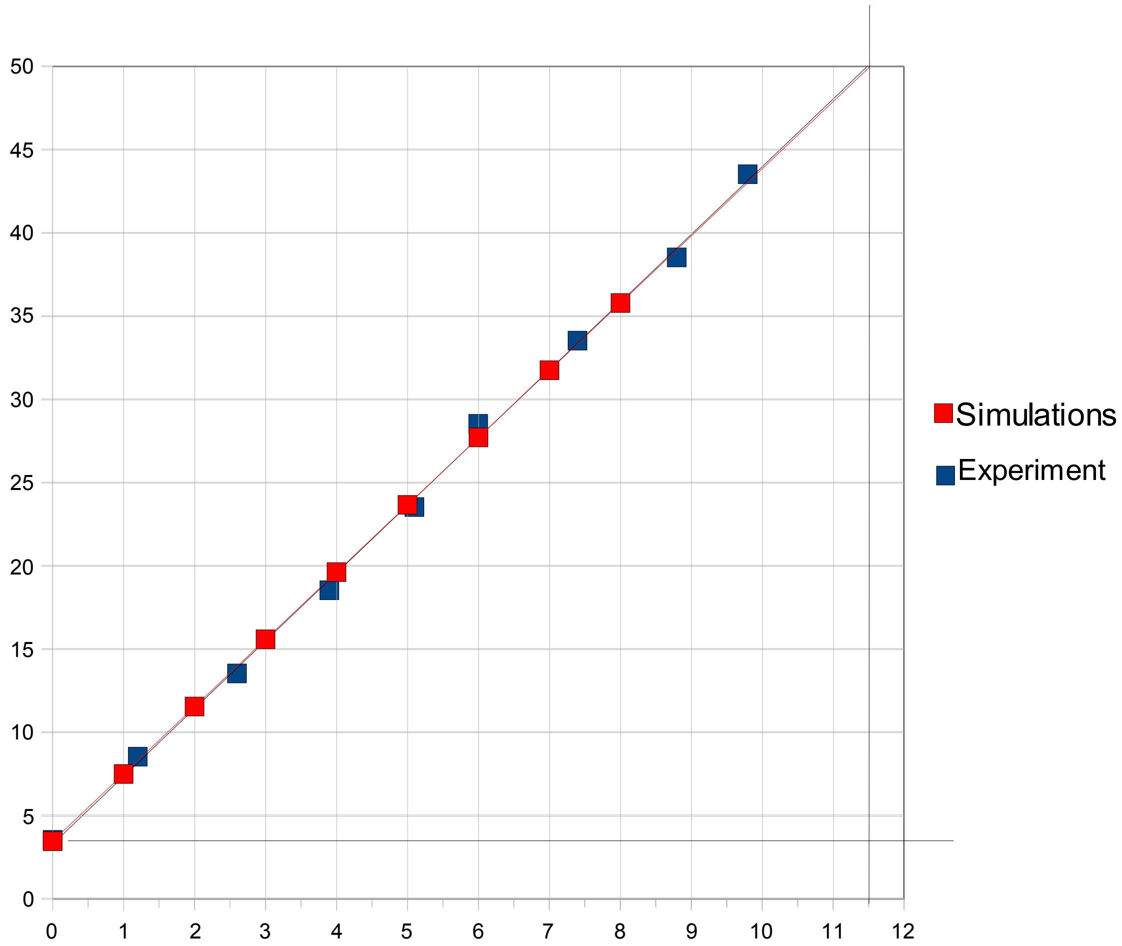
Formel: $v = \Delta s / \Delta t$

n	s	t	v_{exp}
1	3,5	0	
2	8,5	1,2	4,17
3	13,5	2,6	3,57
4	18,5	3,9	3,85
5	23,5	5,1	4,17
6	28,5	6	5,56
7	33,5	7,4	3,57
8	38,5	8,8	3,57
9	43,5	9,8	5
10			

Simulation

Formel: $v = \Delta s / \Delta t = 4.04$

s_sim	t_sim	v_{sim}
3,5	0	4,04
7,54	1	4,04
11,58	2	4,04
15,62	3	4,04
19,66	4	4,04
23,7	5	4,04
27,74	6	4,04
31,78	7	4,04
35,82	8	4,04
39,86	9	4,04
43,9	10	4,04



norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl

Das Experiment zeigt einen Verlauf, der mathematisch ausgedrückt werden kann, entweder durch eine Weg-Zeit-Funktion s(t), die im allgemeinen unbekannt ist, oder durch eine sogen. Differenzengleichung/Differentialgleichung

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=4{,}04=\text{const.}$$

d.h. Der Differentialquotient, physikalisch definiert als Geschwindigkeit ist konstant.

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für die Weg-Zeit-Funktion S(t) , deren Differentialquotient den konstanten Wert von 4,04 ergibt. Allgemein lässt sich das als Frage ausdrücken:

> *„Wie sieht die Weg-Zeit-Funktion S(t) aus, für die der Differentialquotient ds/dt = const. = 4.04 ergibt."*

Gegeben ist also der Differentialquotient – ein Stückchen Weg pro Sekunde – aus dem der gesamte Weg-Zeit-Verlauf bestimmt werden soll. Die **Mathematik** liefert dafür ein Verfahren, Aufsummieren (Integrieren) der Differentiale ds und dt. Das Ergebnis ist die Stammfunktion, die gesuchte Weg-Zeit-Funktion s(t). Für komplizierte reale Bewegungen gibt es Bewegungsgleichungen aber keine Stammfunktion als Lösung der Bewegungsgleichung. Insbesondere, wenn Störungen in den Bewegungsgleichungen auftauchen (Reibungsterme). Hier kommt die **Simulation** zum Einsatz. Sie liefern für alle Fälle nummerische Lösungen, die graphisch dargestellt werden können.

Der Rechner kann im hier gegebenen Beispiel aus dem „Stückchen Weg pro Sekunde" durch Summation den gesamten Weg zu jedem Zeitpunkt berechnen, d.h. Die Weg-Zeit-Funktion s(t) nummerisch ermitteln.
Dazu wird der Differentialquotient als Flussgröße, als die Rate des Wegzuwachses in einem **Iterationsprozess** zum Gesamtweg, der Zustandsgröße s(t) zusammengesetzt.

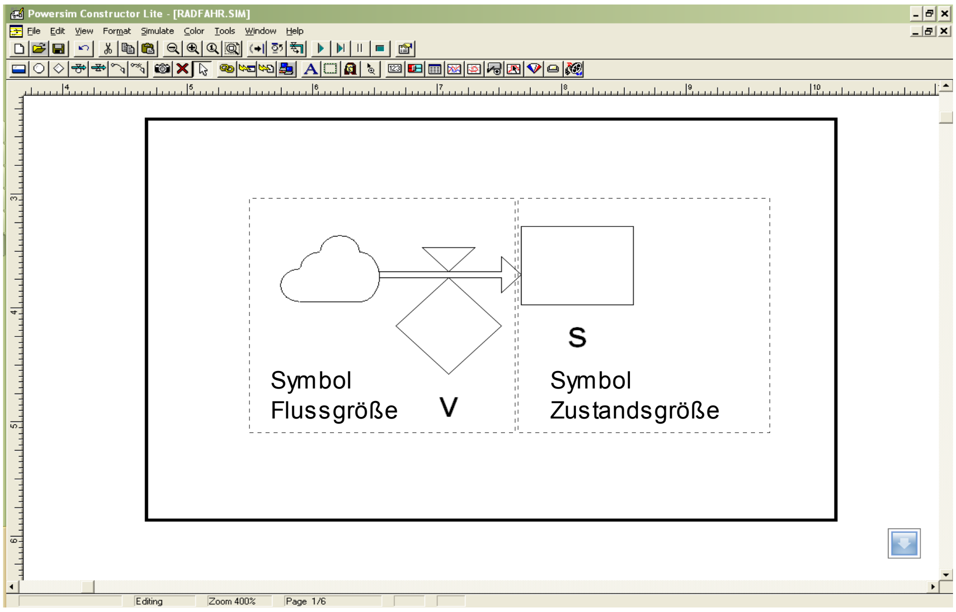
Das Programm **Powersim** bietet dazu eine Reihe von **Symbolen**, die per „drag and drop" auf einer Arbeitsfläche platziert werden können. Zwei Symbole werden auf der Arbeitsfläche wie im Bild zu sehen ist platziert.

In diesem Beispiel:

Zustandsgröße:	s=s(t)	– die Größe, die verändert wird -
Flussgröße:	v=ds/dt	– Größe, die verändert -

Die Flussgröße v wird durch eine Raute symbolisiert. Das angedeutete Ventil am Zuflusspfeil symbolisiert die Veränderungswirkung des Zuflusses in den Zustandsbehälter s. Der Zufluss kommt aus der Welt. Dafür erscheint die Wolke am Fuß des Zuflusspfeiles.

norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl



Hinter dieser Symbolkombination steckt ein Iterationsprogramm (Wiederholung), das in einer Schleife die „Stückchen Weg pro Sekunde" **Δs = v Δt** aufaddieren. Dabei wird in jedem Iterationsschritt zuerst der im vorhergehenden Schleifendurchlauf erzielte Summenwert $s_{neu} = s(t)$ auf den Wert salt geschrieben. Danach wird wieder ein „Stückchen Weg pro Sekunde" dem salt hinzu addiert.

Gegeben sind der Startwert der Zustandsgröße s(t)

$$s_0 = 3{,}5\ \mathrm{m}$$

die Änderungsrate der Zustandsgröße s(t)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4{,}04\ \mathrm{m/s}$$

Aus der Änderungsrate v= Δs/Δt soll mit dem Startwert s_0 der weitere Verlauf s(t) berechnet werden.

$$\Delta s = s_2 - s_1 \qquad v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$s_2 = s_1 + v \cdot (t_2 - t_1)$$

Diese Gleichung wird iterativ berechnet. Dabei wird vereinbart (o. E. d. A.), dass $\Delta t = t_2 - t_1$ konstant ist.

1. Schritt: $s_1 = s_0 + v \cdot \Delta t$
2. Schritt: $s_2 = s_1 + v \cdot \Delta t$
3. Schritt: $s_3 = s_2 + v \cdot \Delta t$
4. Schritt: $s_4 = s_3 + v \cdot \Delta t$

....

n. Schritt: $s_n = s_{n-1} + v \cdot \Delta t$

norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl

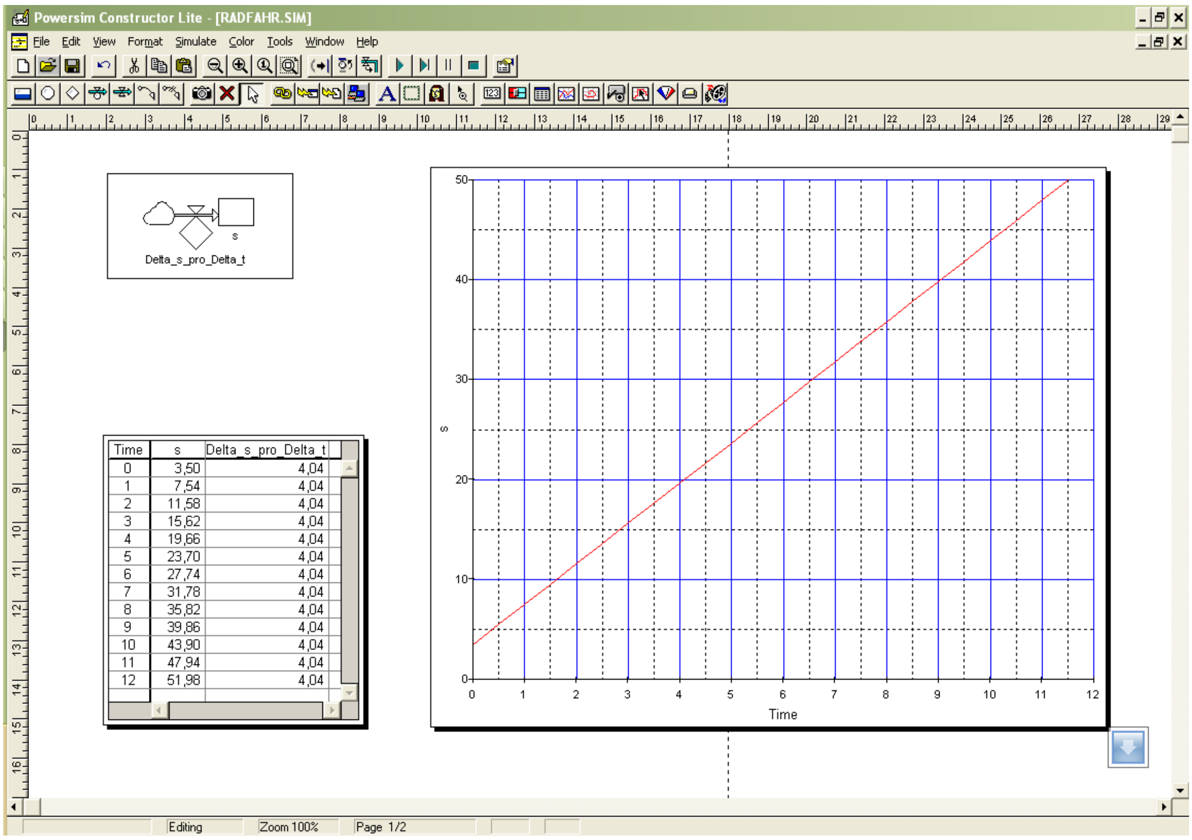
Das ist eine Iterationsgleichung, die vom Computer für eine beliebiges diskretes s ausgewertet werden kann. Allgemein lässt sich diese Gleichung als Funktion s(t) ausdrücken. Hier ist v = v(t-Δt) nicht mehr ein notwendigerweise konstanter Wert, wie in dem Beispiel v=4,04. Die Geschwindigkeit v wird dann ebenfalls in einer Iteration zu einem beliebigen Zeitpunkt t errechnet.:

$$s(t)=s(t-\Delta t)+v(t-\Delta t)\cdot\Delta t$$

Das Iterationsprogramm lautet (für das Beispiel v=4,04; s0=3,5) lautet:

Ändr_s = 4,04 ;
s_{neu} = 3,5;
DeltaT=1;
SCHLEIFE beginn
s_{alt} = s_{neu}
s_{neu}= s_{alt} + Ändr_s * DeltaT
SCHLEIFE ende

Dieses Programm (zu verstehen als eine didaktische Variante eines realen Programms z.B geschrieben in Java) wird in Powersim durch die Zusammenschaltung des Flusssymbols v = Δs/Δt , der Rate mit der sich s ändert und dem Zustandssymbol s, der Größe, die geändert wird, bereitgestellt. Die Ausführung des Programms liefert das folgende Ergebnis.



norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl

Wie zu erwarten, ändert sich der erzielte Weg mit einer konstanten zeitlichen Rate $\Delta s/\Delta t$, d.h. $s = v\,t + s_0$; v=const.

2. Experiment und Simulation in der DYNMATIK

Wenn wir nach der Ursache einer Bewegungsänderung fragen, dann brauchen wir einen Begriff, der die Wirkung als Folge der Ursache beschreibt. Dieser Begriff ist ein Relationsbegriff; er beschreibt einen Ursache – Wirkung – Zusammenhang.

Beispiel 1: frei fallender Körper

Beim freien Fall bewirkt die Ursache -Gravitation(Kraft) eine Geschwindigkeitsänderung. Diese Kraft ist die Flussgröße **(m dv/dt)**, die die Zustandsgröße **(v)** ändert und zwar entspricht einer konstante Kraft eine konstante Geschwindigkeitsänderung.

Die Differentialgleichungen für den freien Fall lassen sich aus dem Kraftgesetz der Gravitation auf der Erde **F_g = m dv/dt** und der Geschwindigkeitsdefinition **v = ds/dt** aufstellen. Fg ist eine gegebene Größe z.B Fg=19,62N und die Masse m=2kg. Dann ist Fg/m = g = 9,81 N/kg

9,81 = dv/dt ; und **v = ds/dt**

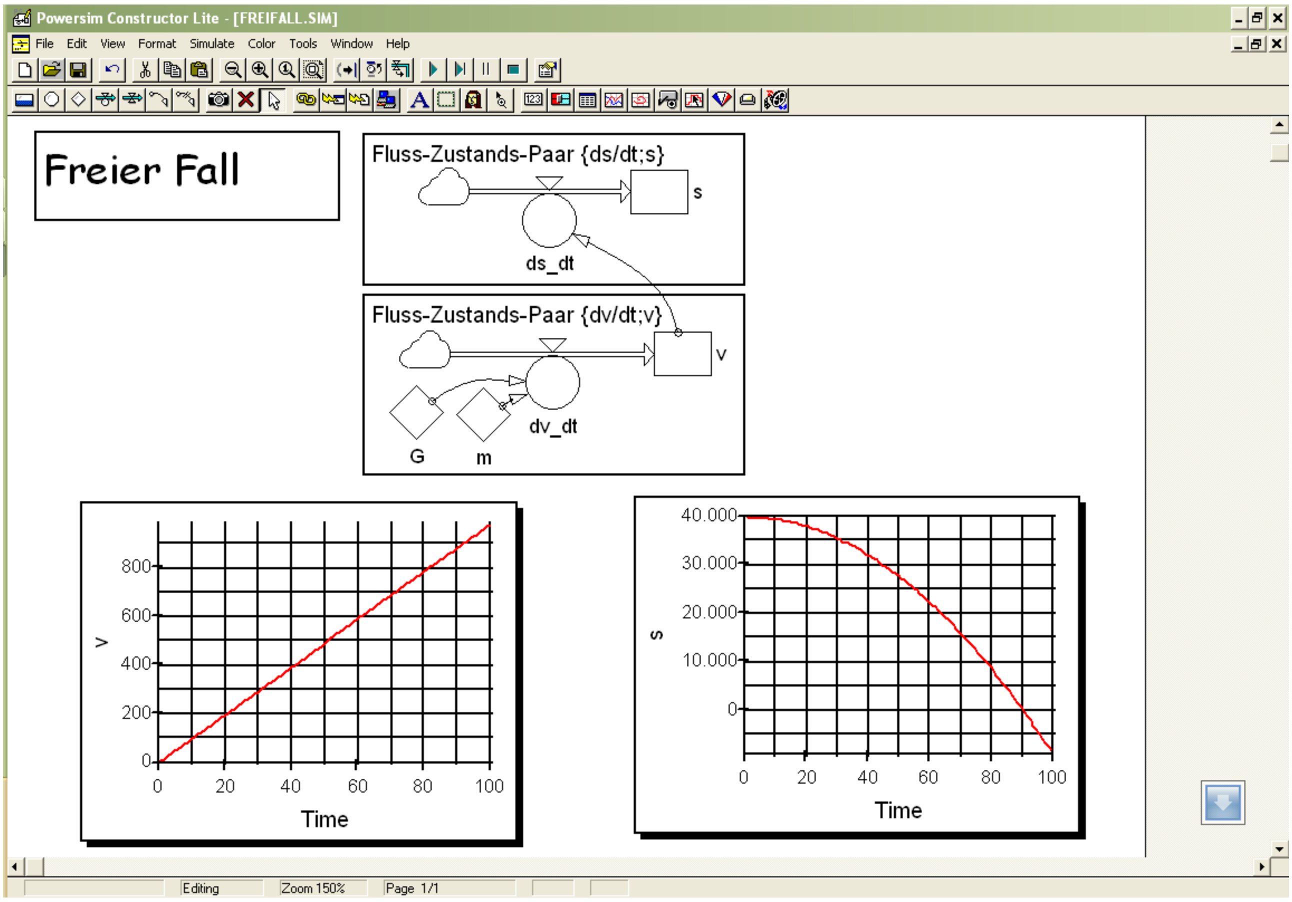
sind zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung zur **numerischen** Bestimmung der Geschwindigkeitszeitfunktion v(t) und der Wegzeitfunktion s(t). Die beiden Gleichungen sind verkoppelt, da die Geschwindigkeit v sowohl als Flussgröße dv/dt und als Zustandsgröße v auftritt.

Für die Simulation der Fallbewegung schalten wir die beiden **Fluss-Zustandspaare** {dv/dt;v} und {ds/dt;s} zusammen, sodass sie der Kopplung der beiden Dgl´s entsprechen. Folgendes Verfahren ist anzuwenden:

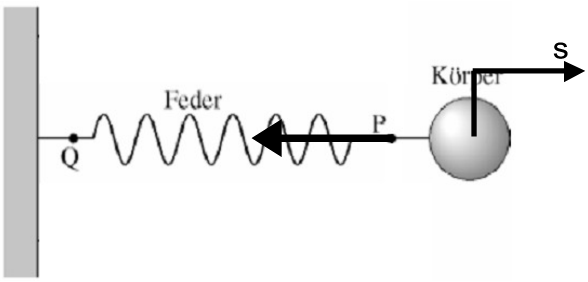
1. Suche die zu einem Problem gehörigen Fluss und Zustandspaare.
2. Schalte die Symbole für die Flussgröße und Zustandsgröße zu einem Fluss-Zustandspaar in Powersim zusammen.
3. Erstelle die Kopplung Flussgröße - Zustandsgröße

Die Simulation liefert die Abhängigkeiten v(t) und s(t) nur als Wertepaare, also numerisch (Zahlentabellen). Die Funktionen v(t), s(t) liefern sie nicht. Das erscheint auf dem ersten Blick als ein Nachteil. Wenn aber die Simulation benutzt werden soll um für das Experiment geeignete Parameter (Stellschrauben des Systems) zu finden, so verkürzt das den experimentellen Aufwand. Dies wird im Folgenden an Hand der Federschwingung demonstriert.

norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl



Beispiel 2: frei schwingender Körper



Die Fluss – Zustandspaare beim Federschwinger lauten: {ds/dt; s} und {dv/dt; v}.

Das Kraftgesetz der Feder liefert die konkrete Kraft, die die Kugel in Bewegung setzt. $F = -D\,s$

Das Grundgesetz der Mechanik liefert die Verbindung zur Flussgröße dv/dt

$$F = m\,dv/dt$$

Zusammen liefern die beiden Gleichungen einen konkreten Ausdruck für die Flussgröße dv/dt

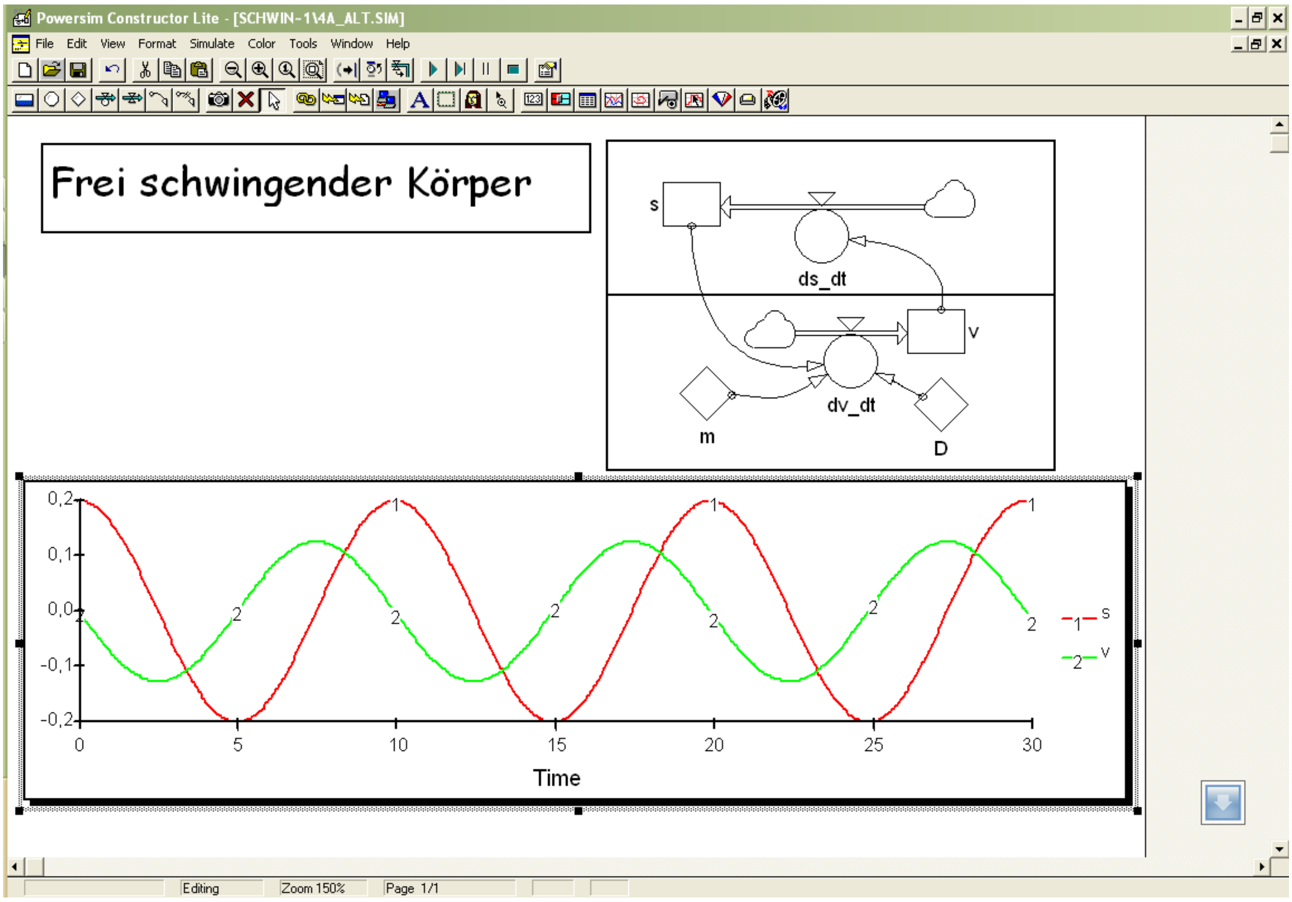
$$dv/dt = -D/m \cdot s$$

Die zweite Flussgröße ist die Geschwindigkeitsdefinition ds/dt

$$ds/dt = v$$

norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl

Die Kopplung findet wieder über die Geschwindigkeit v und deren Flussgröße dv/dt statt.



norbert.schwab@quantart.de
www.quantart.de/riehl