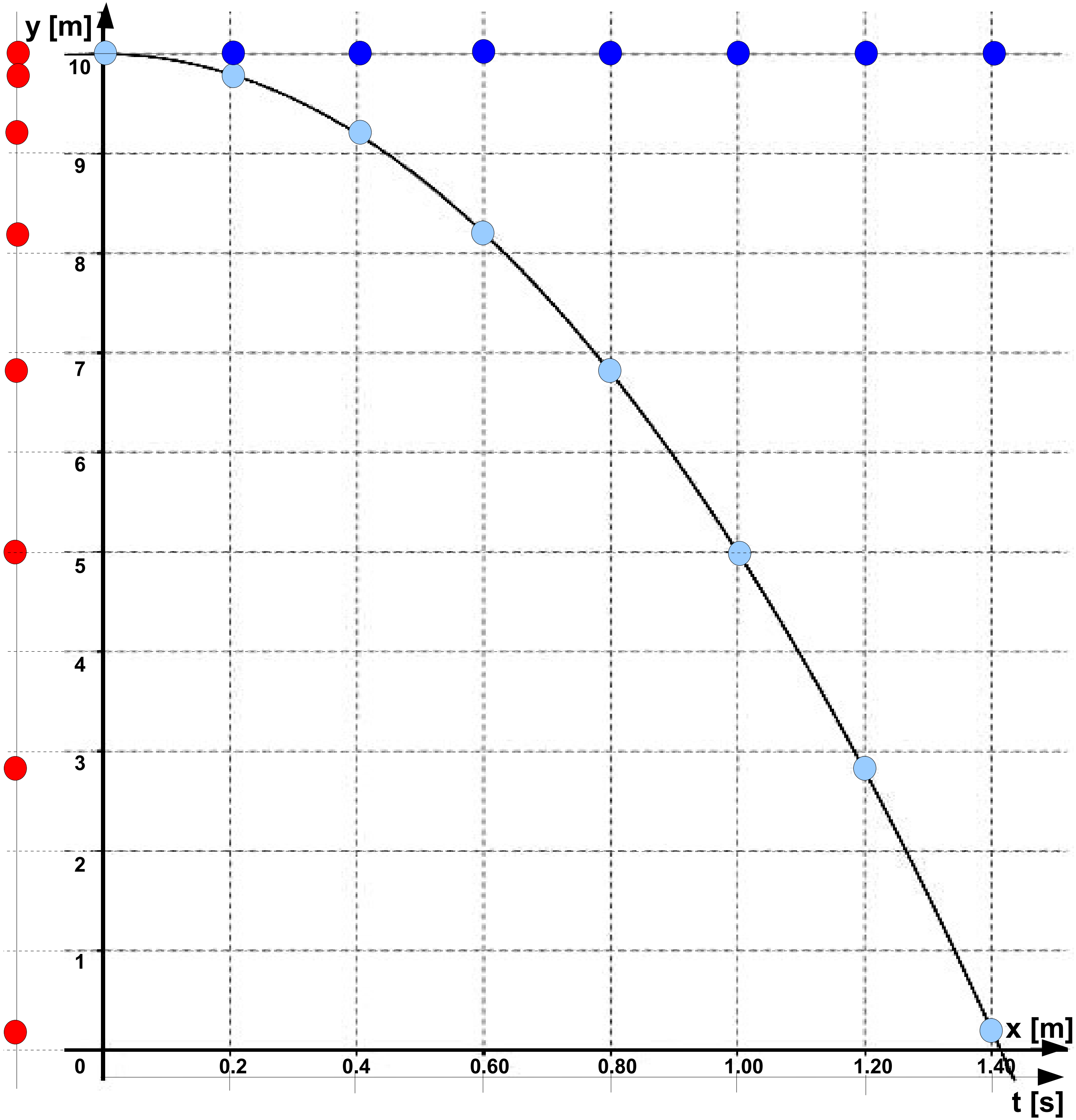
Der waagerechte Wurf einer Kugel (Massenpunkt) im Labor folgt zeitlich der dargestellten Bahnkurve. Die **Orts- oder Bahnkurve** wird dargestellt im zweidimensionalen Ortsraum (Konfigurationsraum), aufgespannt durch ein rechtwinkliges, orthogonales Koordinatensystem (OKS) .

Die markierten Punkte zeigen den mit einer Stroboskopkamera in gleichen zeitlich Abstände (x-Richtung) belichteten Kugel. **Alle 0,2 Sekunden wird der Massenpunkt in seiner Lage (Koordinaten) sichtbar gemacht.**

Der Kurvenverlauf kann durch ein Überlagerung einer **gleichförmigen Bewegung** in x-Richtung und einer **gleichmäßig beschleunigten Bewegung** in negativer y-Richtung mathematisch ermittelt und geometrisch dargestellt werden.

Der zeitliche Verlauf einer (nur) vertikalen gleichmäßigen beschleunigten Bewegung (linke Strobuskopaufnahme) stimmt mit der vertikalen Komponente der Wurfkurve überein. D.h., zwei unabhängige Kugeln durchlaufen gleichzeitig gestartet die senkrechte und die waagerechte Fallbahn und sind jederzeit auf gleicher Höhe und kommen gleichzeitig auf dem Boden an.

Daraus folgt: **Die beiden Bewegungen sind unabhängig voneinander.**



Stroboskopaufnahme einer gleichförmige gradlinige horizontalen Bewegung

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{v_x} \cdot \mathbf{t} = 1\,\mathbf{m/s} \cdot \mathbf{t}$$

+

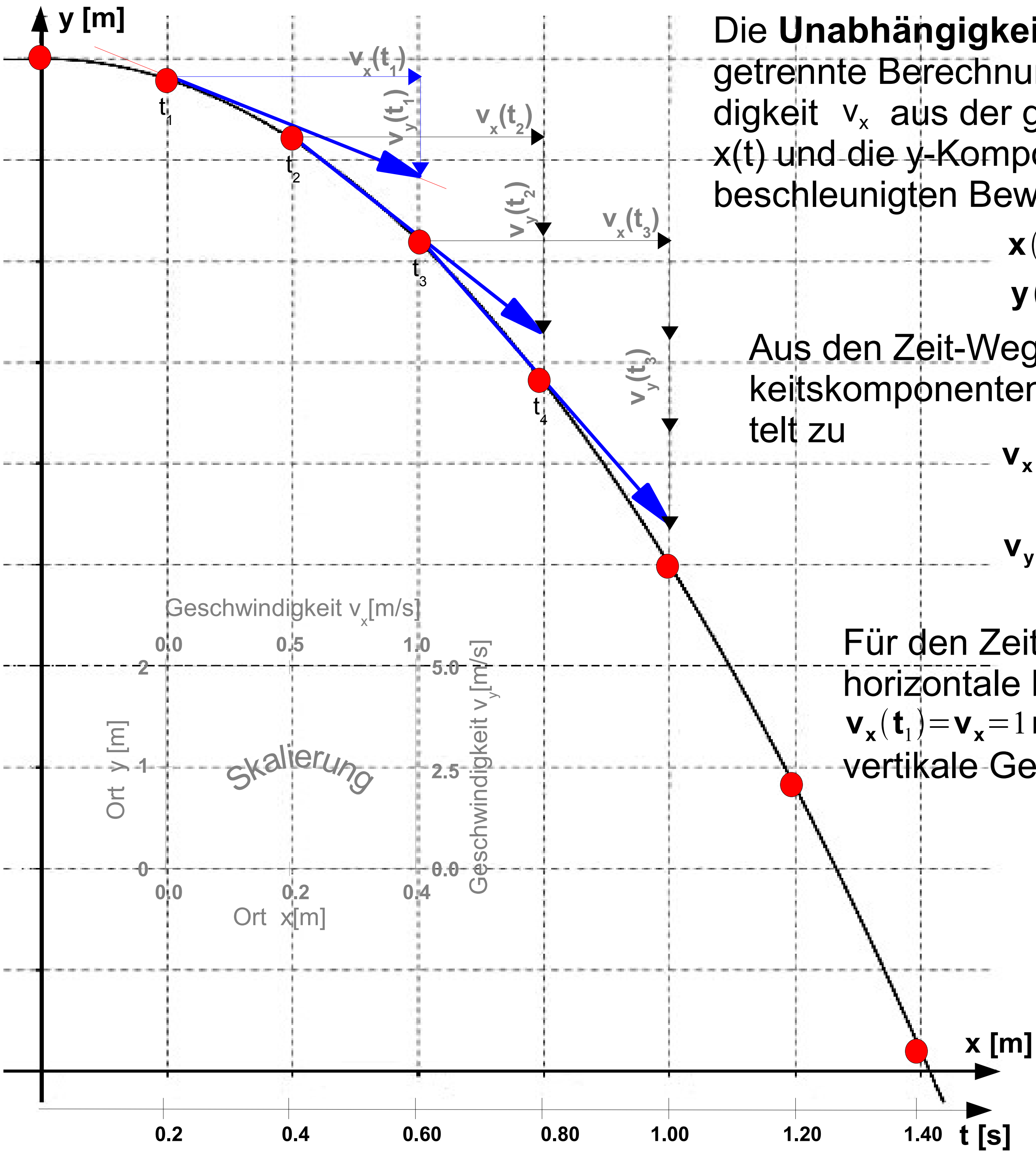
Stroboskopaufnahme einer gleichmäßig beschleunigten vertikalen Bewegung

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{y}_0 - \frac{\mathbf{g}}{2} \cdot \mathbf{t}^2 = 10\,\mathbf{m} - \frac{10}{2}\,\mathbf{m/s}^2 \cdot \mathbf{t}^2$$

=

Stroboskopaufnahme eines waagerechten Wurfes im Schwerefeld der Erde (negative y-Richtung

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{y}_0 - \frac{\mathbf{g}}{2\,\mathbf{v}_\mathbf{x}^2} \cdot \mathbf{x}^2 = 10 - 5 \cdot \mathbf{x}^2$$



Die **Unabhängigkeit** der beiden Bewegungen erlaubt die getrennte Berechnung der x-Komponente der Geschwindigkeit v_x aus der gleichförmigen Horizontalbewegung x(t) und die y-Komponente v_y aus der vertikalen beschleunigten Bewegung y(t) des Massenpunktes.

$$\mathbf{x}(\mathbf{t})=\mathbf{v_x}\cdot\mathbf{t} \qquad =1\,\mathbf{m/s}\ \cdot\mathbf{t}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t})=\mathbf{y}_0-\mathbf{g}\cdot\mathbf{t}^2=10\,\mathbf{m}-5\,\mathbf{m/s}^2\cdot\mathbf{t}^2$$

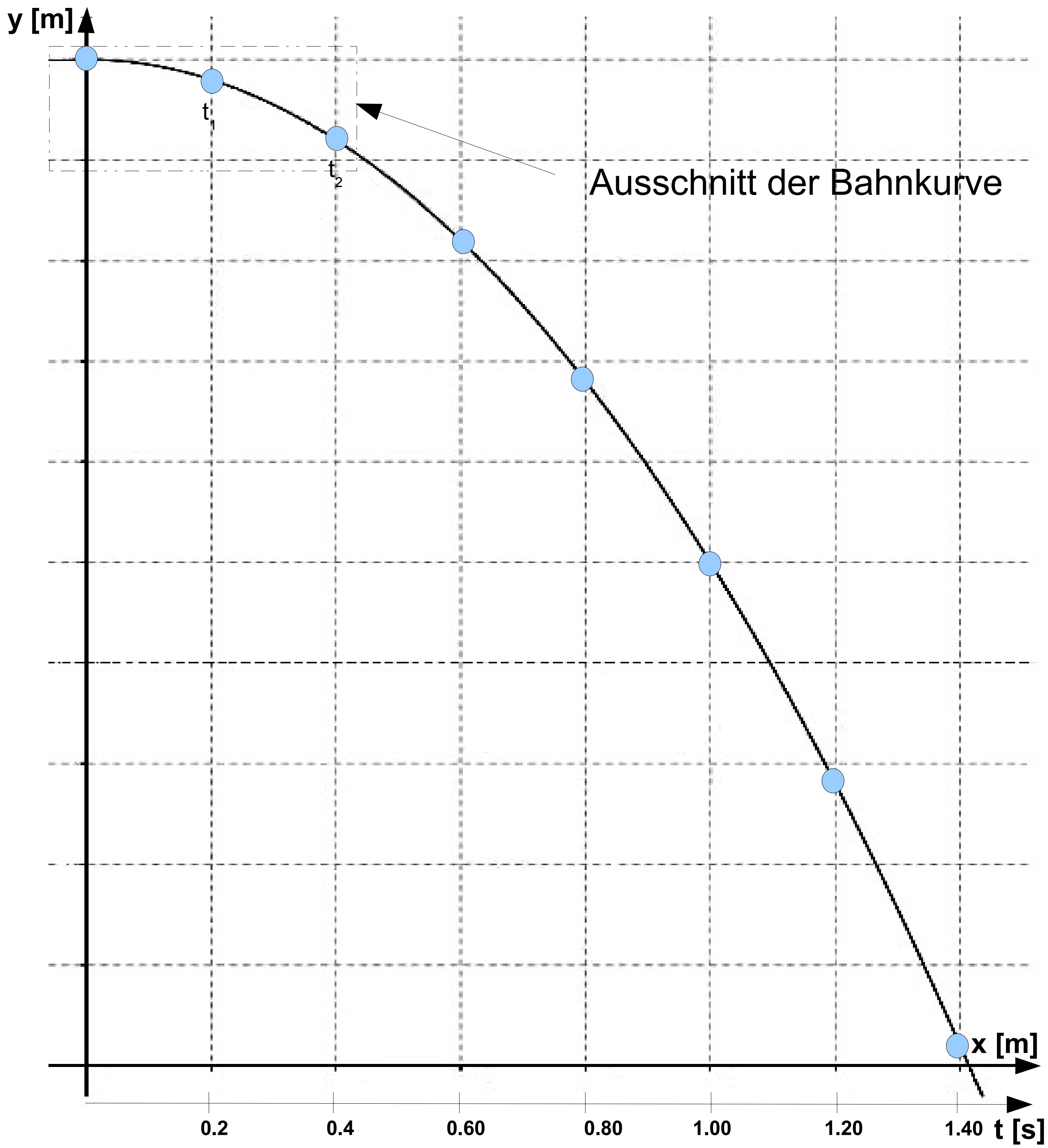
Aus den Zeit-Weg-Funktionen wird jede Geschwindigkeitskomponenten durch Differentiation einzeln ermittelt zu

$$\mathbf{v_x}(\mathbf{t})=\lim\frac{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(\mathbf{t})}{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}}=\frac{\mathbf{dx}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}}=\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v_x}$$

$$\mathbf{v_y}(\mathbf{t})=\lim\frac{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}(\mathbf{t})}{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}}=\frac{\mathbf{dy}(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}}=\dot{\mathbf{y}}=-\mathbf{g}\cdot\mathbf{t}$$

Für den Zeitpunkt $\mathbf{t}_1=0{,}2\,\mathbf{s}$ ergeben sich eine horizontale konstante Geschwindigkeit $\mathbf{v_x}(\mathbf{t}_1)=\mathbf{v_x}=1\,\mathbf{m/s}$ und eine linear veränderliche vertikale Geschwindigkeit von $\mathbf{v_y}(\mathbf{t}_1)=-\mathbf{g}\cdot\mathbf{t}_1=-2\mathrm{m}/\mathbf{s}$

Die Geschwindigkeitvektoren geben im Ortsdiagramm die zum Zeitpunkt $\mathbf{t_i}$ gehörende momentane Richtung an. Ihre Längen werden nach einer eigenen Skalierung/Maßeinheit im gleichen Maßstabsverhältnis (x/y) eingetragen.



y [m]
t1
t2
Ausschnitt der Bahnkurve
x [m]
0.2
0.4
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
t [s]

Ermittlung und Darstellung der Orts-Zeit-Funktion mit Hilfe des Vektorkalküll

Die Ort-Zeit-Funktion wird in der zweidimensionalen Ebene (z.B. waagerechter Wurf) durch die Vektorfunktion beschrieben.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Die Zeit als Parameter. Jedem Ortspunkt {x(t) | y(t)} wird ein Zeitpunkt t zugeordnet. Dargestellt wird die Ortskurve (z.B. Spur einer waagerecht geworfene Kugel im Schwerefeld) in der zweidimensionalen Ebene. Die zeitliche Abhängigkeit wird durch Zeitmarken (sogen. Stroboskoppunkte) auf der Spur des Ortskurvenverlaufs dargestellt.

Beispiel:

- Ortskurvenverlauf beim waagerechten Wurf (Ausschnitt).
- Zwei Zeitmarken P_1(0,2 | 9,8) und P_2(0,4 | 9,2) sind eingetragen.
- Die Vektorfunktion

Die Komponenten x(t), y(t) sind gegeben durch:

$$x(t) = v_x \cdot t \qquad \text{gleichförmig gradlinige Bewegung}$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2 \qquad \text{gleichmäßig beschleunigte Bewegung}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x \cdot t \\ y_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} 0{,}2\,m \\ 9{,}8\,m \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} 0{,}4\,m \\ 9{,}2\,m \end{pmatrix}$$

Ermittlung und Darstellung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion mit Hilfe des Vektorkalküll

Ein heuristischer Ansatz:

Es wird zurückgegriffen auf die eingeführte Definition für die Geschwindigkeit auf gerader Strecke. Sie ist festgelegt durch einen Differentiationsprozess der Ort-Zeit-Funktion x(t) einer gradlinigen Bewegung.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = v(t)$$

Der infinitesimale Übergang erlaubt es eine Momentangeschwindigkeit einzuführen.
Da die Komponenten x(t), y(t) in der Vektorfunktion unabhängig voneinander sind, kann der Differentiationsprozess auf die Vektorfunktion als Ganze angewendet werden, indem die Komponenten einzeln dem obigen Differentiationprozess unterworfen werden.

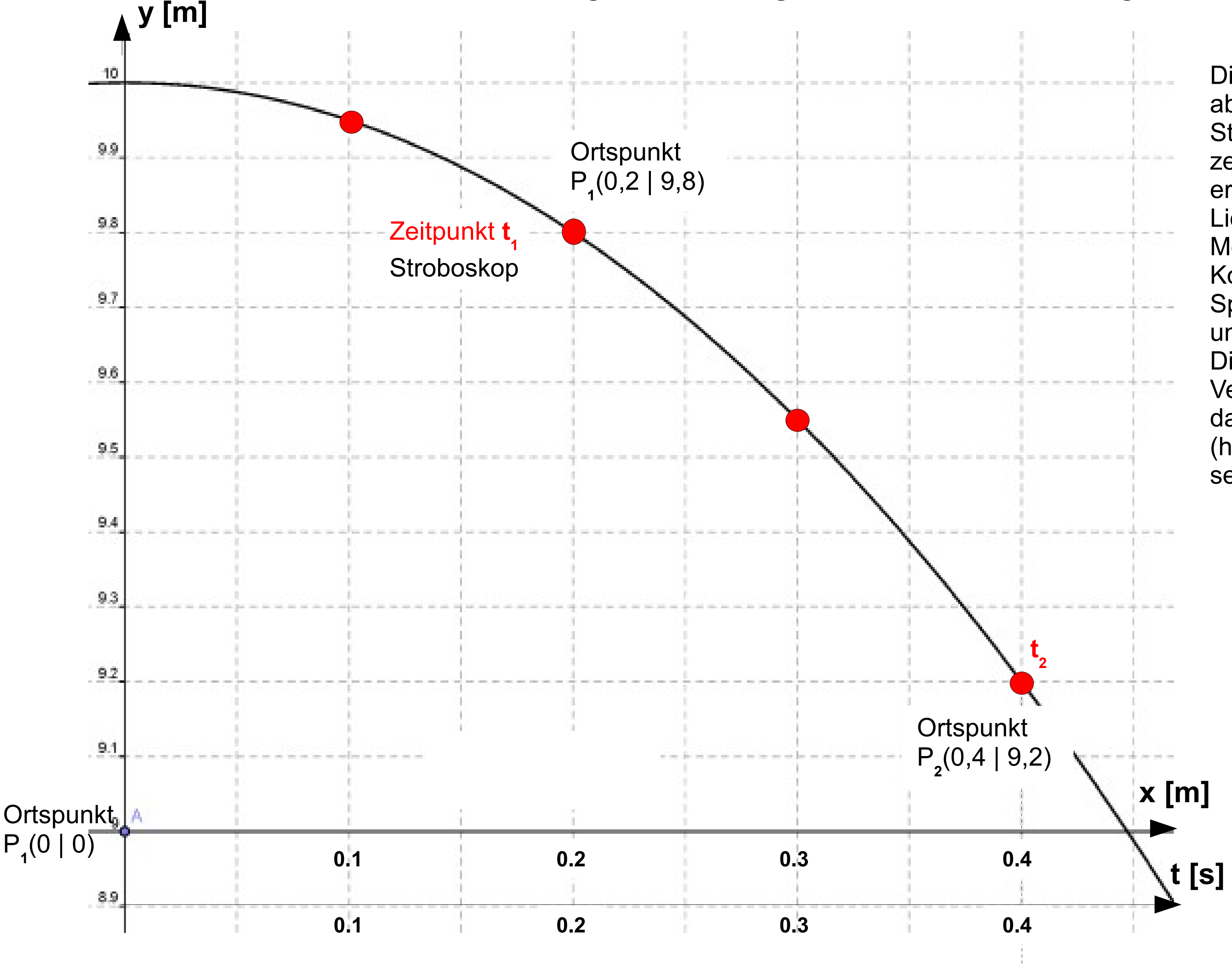
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta}{\Delta t} \vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta}{\Delta t} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Für die beiden Bewegungstypen (gleichförmige gradlinige Bewegung und gleichmäßig beschleunigte Bewegung) ergibt sich die Vektorfunktion für die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ -g \cdot t \end{pmatrix}$$

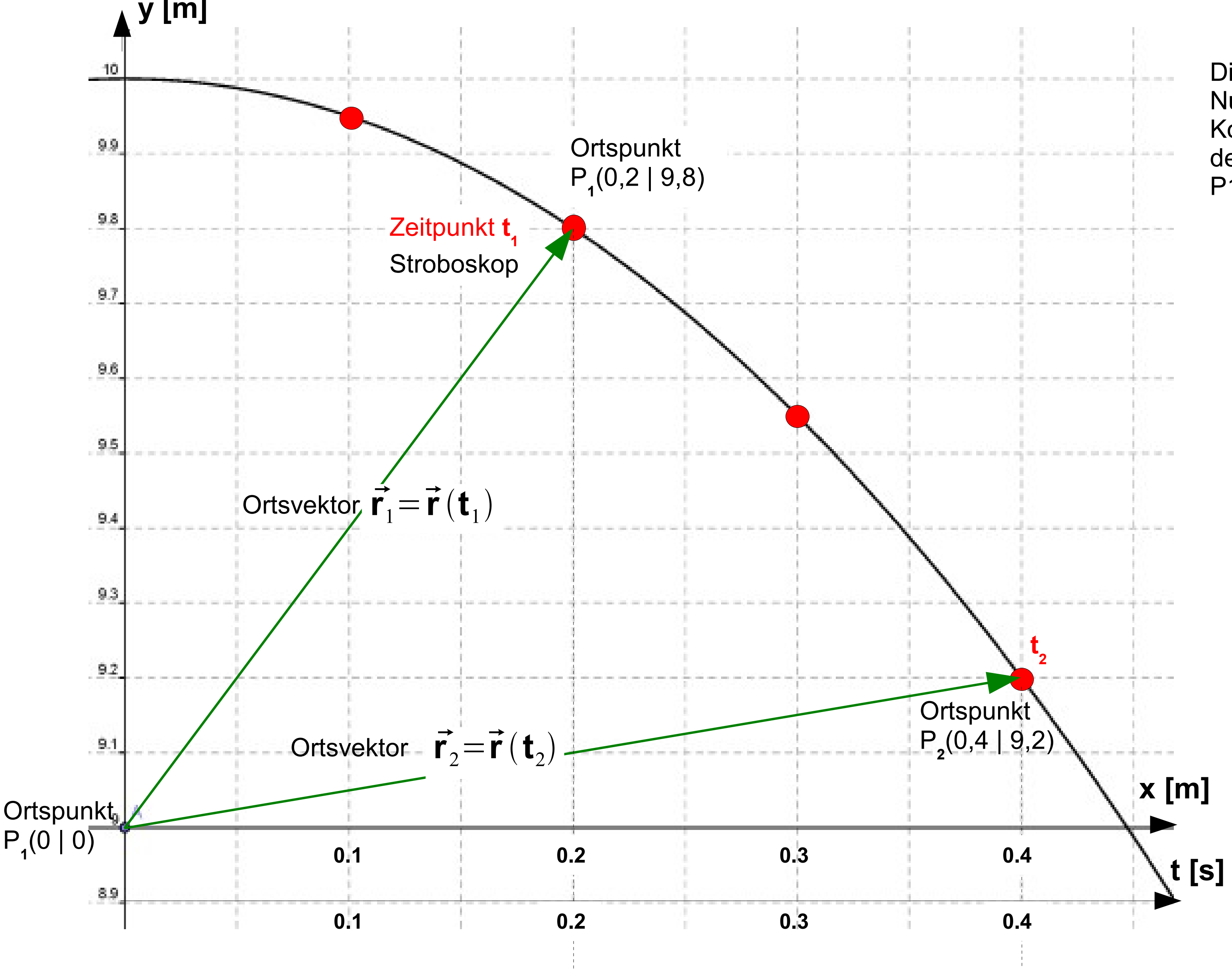
$$\dot{\vec{r}}(t_1 = 0{,}2\,s) = \begin{pmatrix} +1\,m/s \\ -2\,m/s \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot{\vec{r}}(t_2 = 0{,}4\,s) = \begin{pmatrix} +1\,m/s \\ -4\,m/s \end{pmatrix}$$

Orts-Zeit-Funktion mit Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit



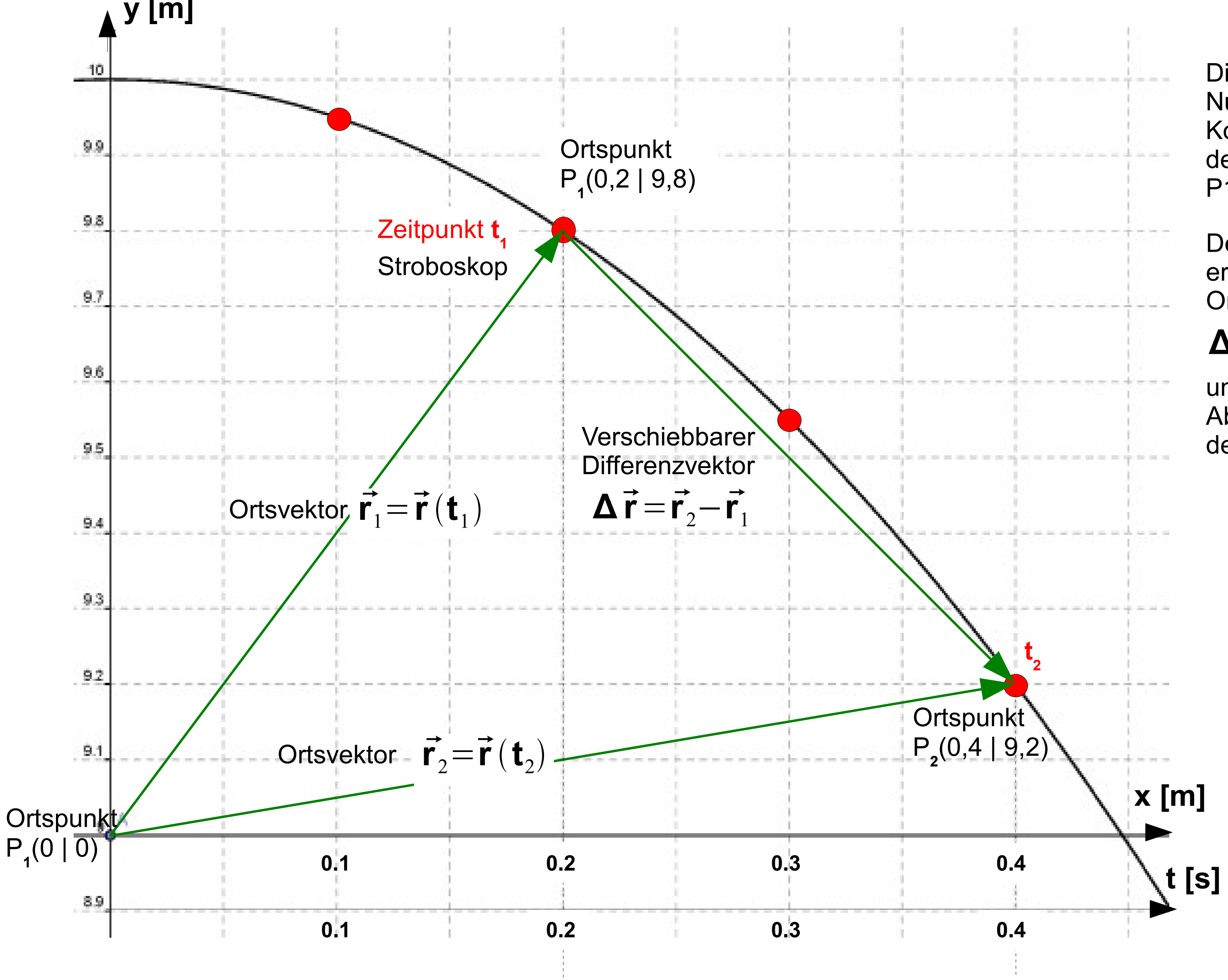
Die Bewegung einer waagerecht abgeschossenen Kugel wird mit einer Stroboskopkamera aufgenommen. Im zeitlichen Abstand von 0,1 Sekunden erfolgt das An- und Abschalten eines Lichtblitzes. Die Positionen dieser Momentaufnahmen, bezogen auf ein Koordinatensystem, markieren die Spur der die Kugel in Raum (Ebene) und Zeit (Stroboskoppunkte) folgt. Die Spur zeigt das räumlicher Verhalten und die Stroboskoppunkte das zeitliche Verhalten der Bewegung (hier waagerechter Wurf im senkrechten Schwerefeld der Erde.

Orts-Zeit-Funktion mit
Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit



Die **Ortsvektoren** $\vec{r}$ beginnen im Nullpunkt eines festgelegten Koordinatensystems und zeigen auf den Koordinatenpunkt der Spur (hier P1(0,2|9,8) und P2(0,4|9,2))

Orts-Zeit-Funktion mit
Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit



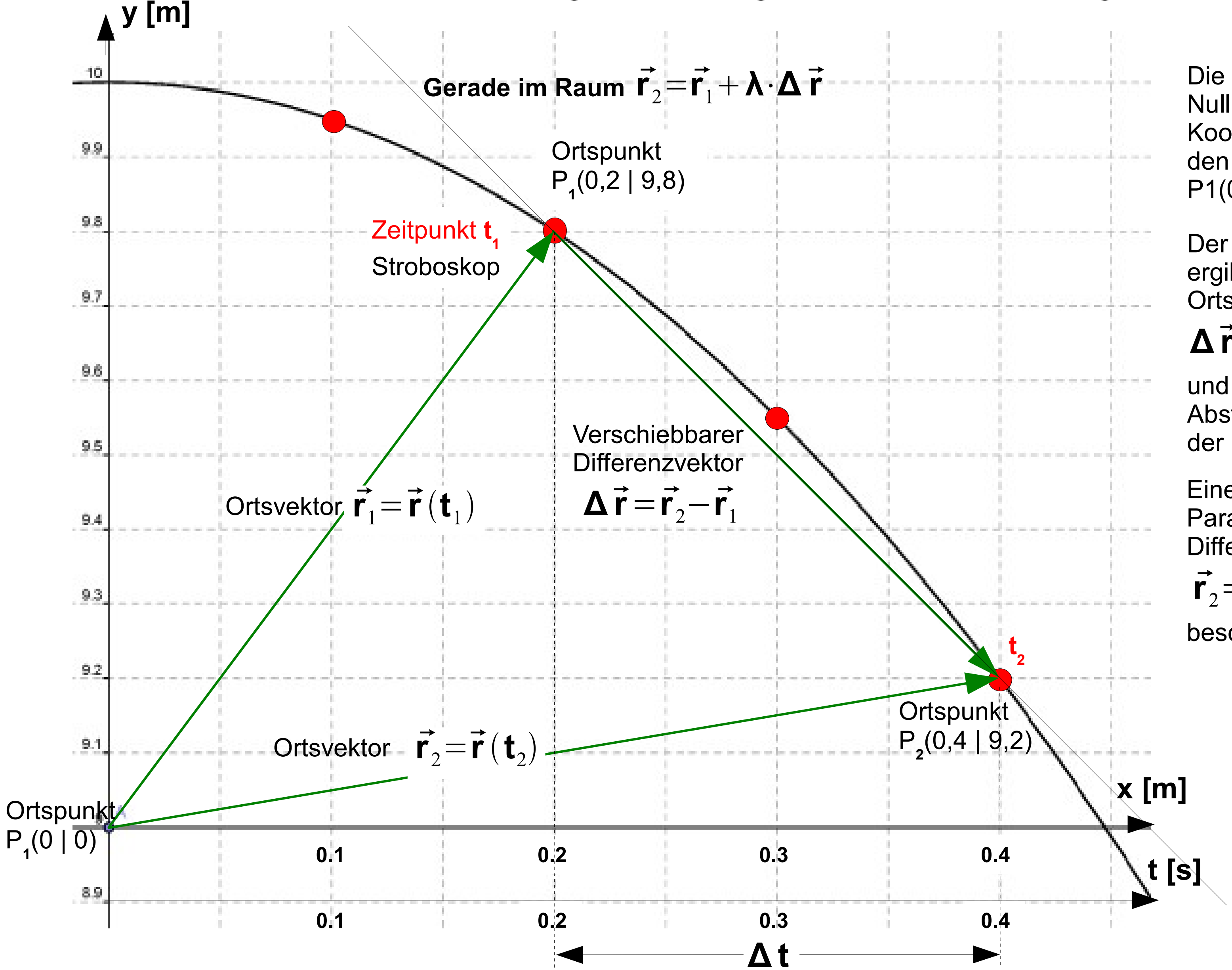
Die **Ortsvektoren** $\vec{r}$ beginnen im Nullpunkt eines festgelegten Koordinatensystems und zeigen auf den Koordinatenpunkt der Spur (hier P1(0,2|9,8) und P2(0,4|9,2))

Der verschiebbare **Differenzvektor** $\Delta\vec{r}$ ergibt sich aus der Subtraktion zweier Ortsvektoren

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

und beschreibt die Richtung und den Abstand zweier Punkte auf der Spur der Kurve im Raum.

Orts-Zeit-Funktion mit
<u>Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit</u>



Die **Ortsvektoren** $\vec{r}$ beginnen im Nullpunkt eines festgelegten Koordinatensystems und zeigen auf den Koordinatenpunkt der Spur (hier P1(0,2|9,8) und P2(0,4|9,2))

Der verschiebbare **Differenzvektor** $\Delta \vec{r}$ ergibt sich aus der Subtraktion zweier Ortsvektoren

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

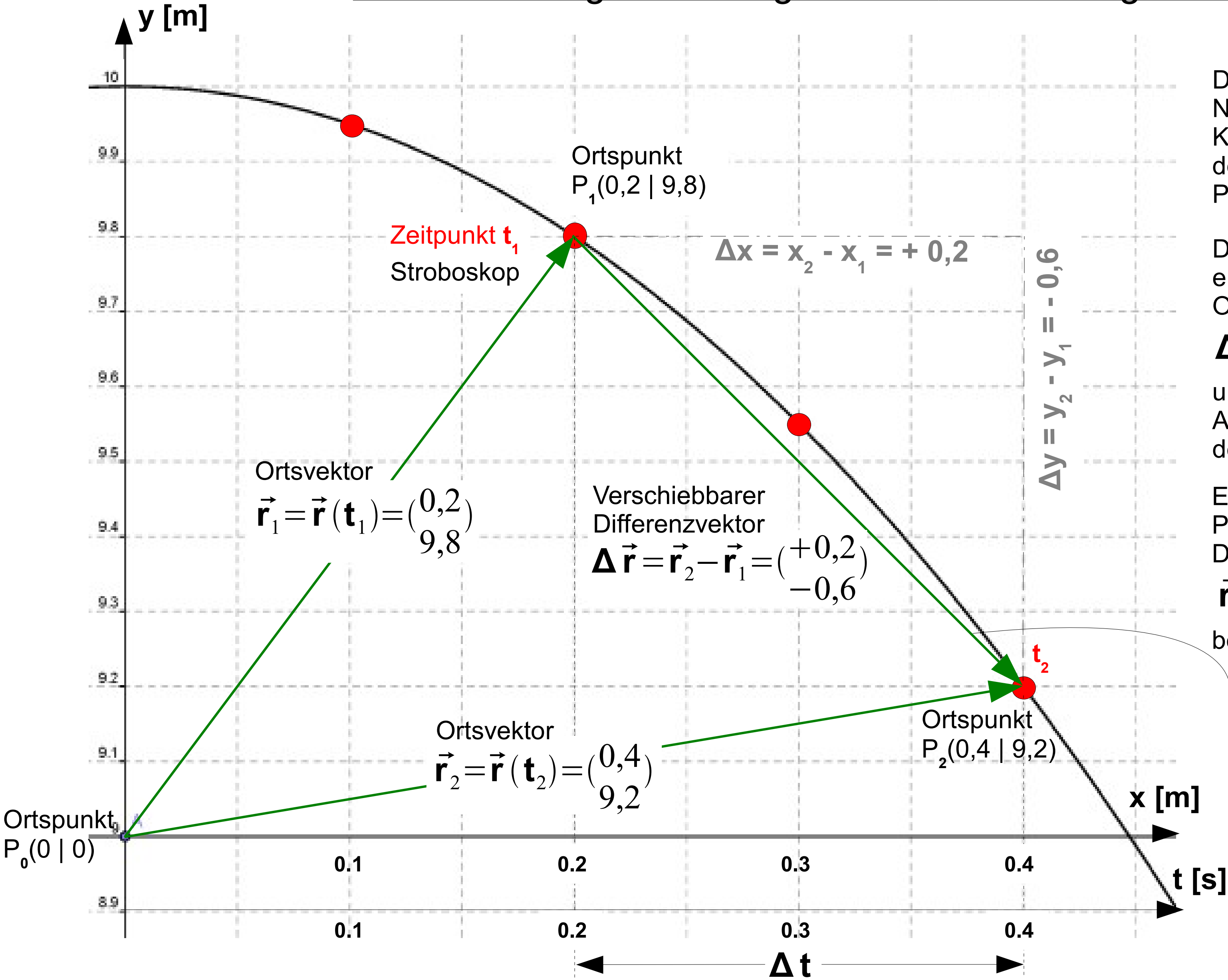
und beschreibt die Richtung und den Abstand zweier Punkte auf der Spur der Kurve im Raum.

Eine entsprechende Parameterdarstellung des Differenzvektors

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \Delta \vec{r}$$

beschreibt eine **Gerade im Raum**.

Orts-Zeit-Funktion mit
Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit



Die **Ortsvektoren** $\vec{r}$ beginnen im Nullpunkt eines festgelegten Koordinatensystems und zeigen auf den Koordinatenpunkt der Spur (hier P1(0,2|9,8) und P2(0,4|9,2))

Der verschiebbare **Differenzvektor** $\Delta\vec{r}$ ergibt sich aus der Subtraktion zweier Ortsvektoren

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

und beschreibt die Richtung und den Abstand zweier Punkte auf der Spur der Kurve im Raum.

Eine entsprechende Parameterdarstellung des Differenzvektors

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \Delta\vec{r}$$

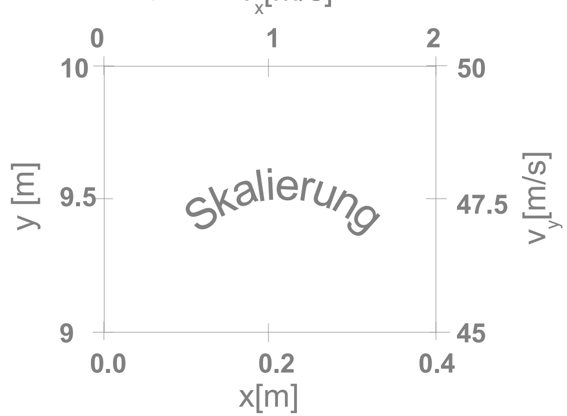
beschreibt eine **Gerade im Raum**.

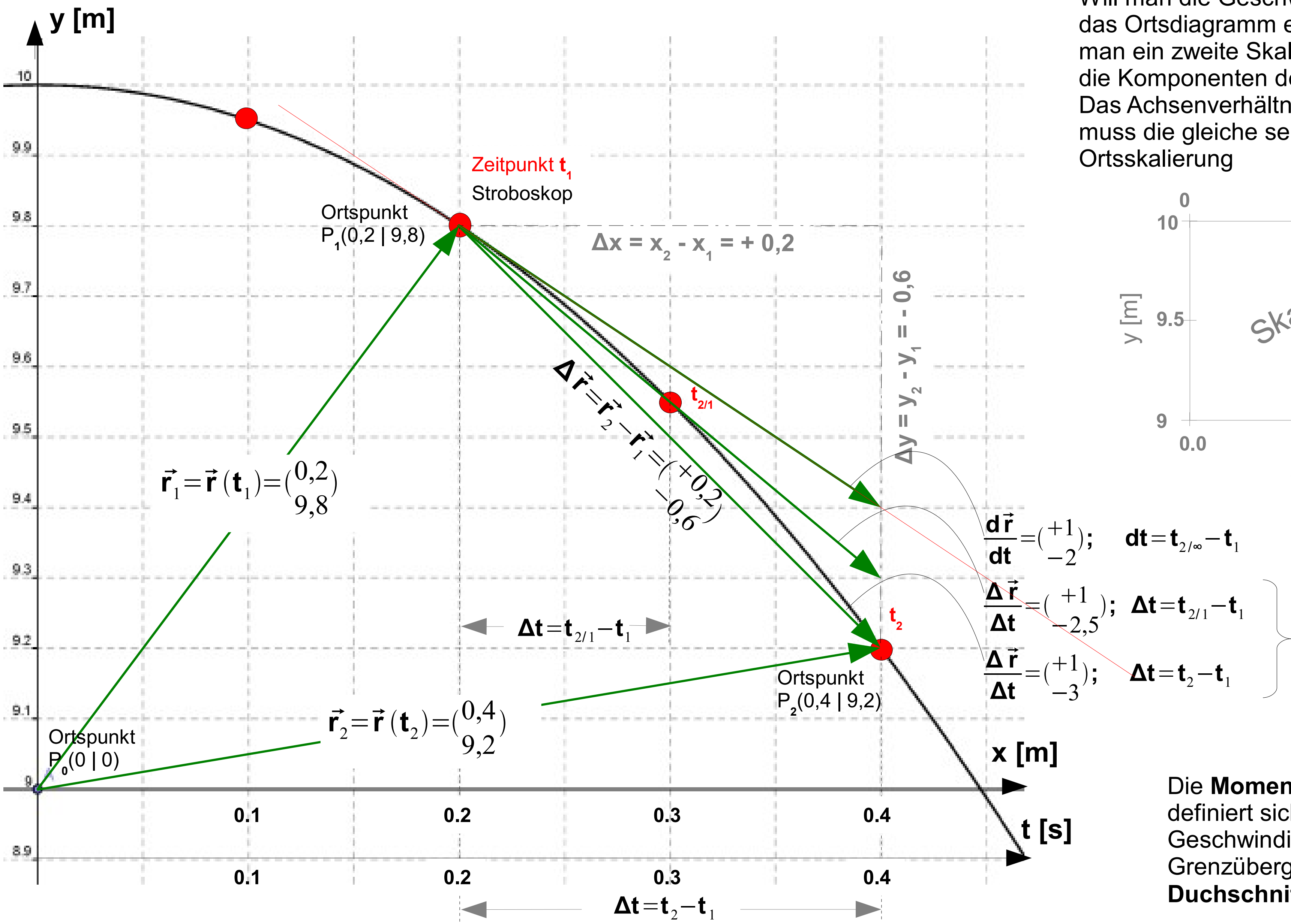
Die gerichtete Größe kann zur Approximation des Kurvenverlaufes genutzt werden und durch Bezug auf die Zeiteinheit als vektorielle Größe der Geschwindigkeit (**Durchschnitt-geschwindigkeit**) definiert werden.

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \binom{+1}{-3}$$

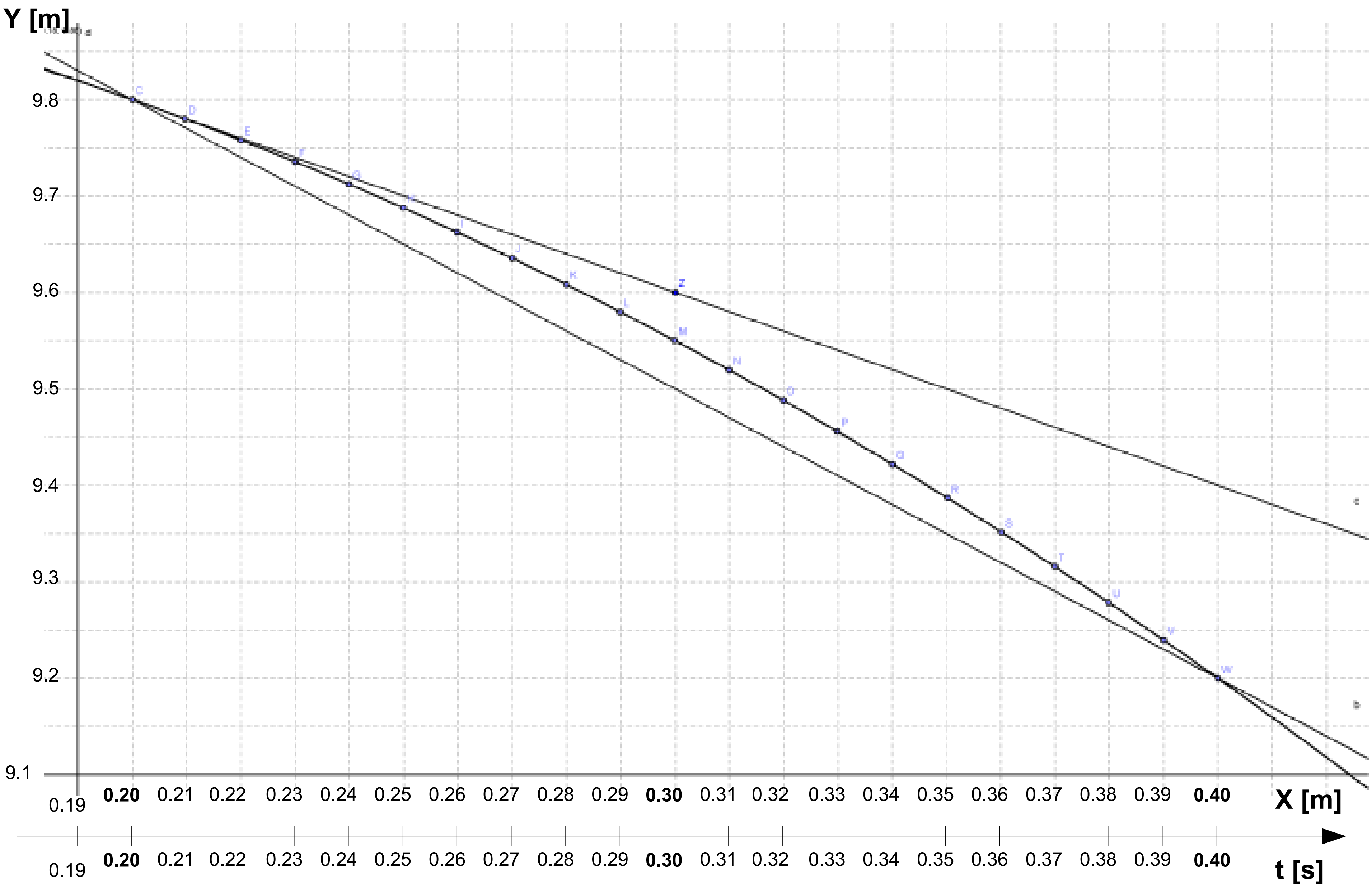
Orts-Zeit-Funktion mit
Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit

Will man die Geschwindigkeitsvektoren in das Ortsdiagramm einzeichnen, braucht man ein zweite Skalierung der Achsen für die Komponenten der Geschwindigkeit. Das Achsenverhältnis dieser Skalierung muss die gleiche sein, wie die Ortsskalierung





Die **Momentangeschwindigkeit** definiert sich als punktuelle Geschwindigkeit aus dem Grenzübergang der Folge der **Duchschnittgeschwindigkeiten.**


Y [m]
9.8
9.7
9.6
9.5
9.4
9.3
9.2
9.1
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
Z
0.19
0.20
0.21
0.22
0.23
0.24
0.25
0.26
0.27
0.28
0.29
0.30
0.31
0.32
0.33
0.34
0.35
0.36
0.37
0.38
0.39
0.40
X [m]
0.19
0.20
0.21
0.22
0.23
0.24
0.25
0.26
0.27
0.28
0.29
0.30
0.31
0.32
0.33
0.34
0.35
0.36
0.37
0.38
0.39
0.40
t [s]