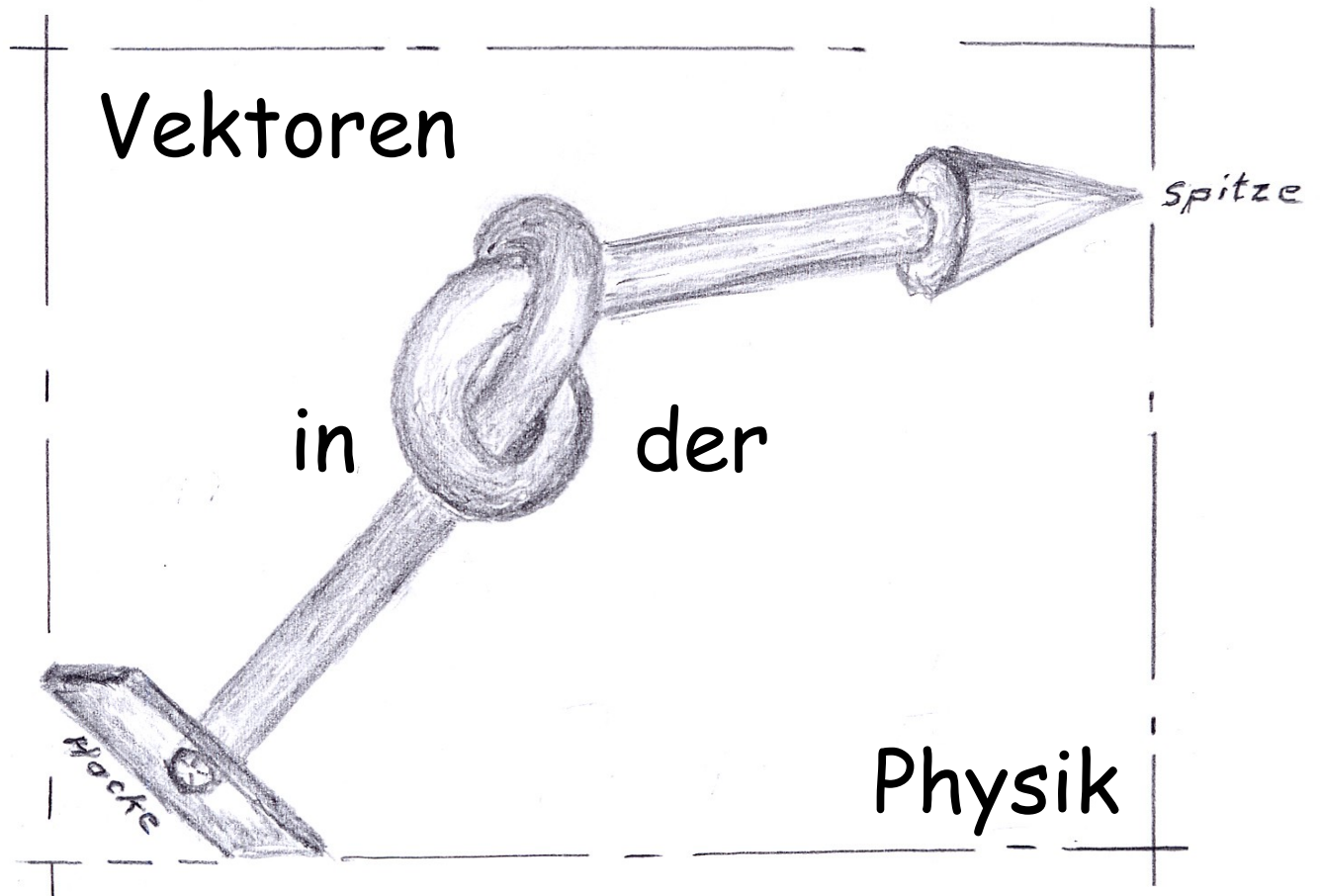




Vektoren in der Physik

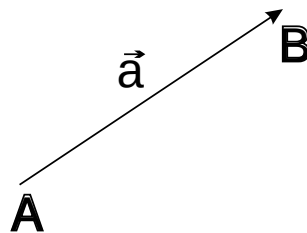
1. Geschwindigkeit und Beschleunigung	7
1.1. Skalare und Vektoren	7
(Addition, Subtraktion, Einheitsvektoren)	8
1.2. Multiplikation von Vektoren	11
Skalarprodukt	11
Vektorprodukt	12
1.3. Vektorfunktionen	18
Beispiele: Kreisbewegung	18
Ableitung von Vektoren	19
Beispiele aus der Physik	
(Geschwindigkeit und Beschleunigung)	20
1.4. Mechanik des freien Massenpunktes	23
2. Newtonsche Mechanik und der freie Fall	26
2.1. Grundgesetze	26
2.2. Beispiele	29
Senkrechter und Schräger Wurf	29
Anhang A: Waagerechter Wurf	A1
Anhang B: Aufgabe Schräger Wurf	B1
Anhang C: Aufgabe: Kreisbewegung	C1

1 Vektoren, Geschwindigkeit und Beschleunigung

1.1 Skalare und Vektoren

Verschiedene Größen in der Physik, wie zum Beispiel die Grundgrößen Länge, Masse und Zeit, können im Rahmen der Newtonschen Mechanik durch eine einzige reelle Zahl spezifiziert werden. Diese Zahl kann dabei von dem Einheitensystem abhängen, in dem wir die Messung vornehmen. Solche Größen bezeichnen wir als Skalare. Ein Skalar wird durch einen Buchstaben angegeben, z. B. für die Zeit t und für die Masse m .

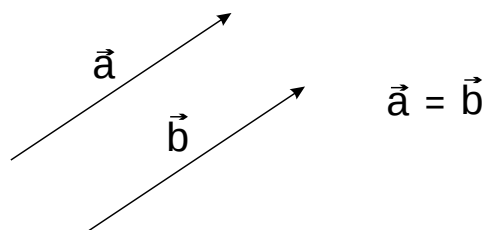
Andere Größen in der Physik wie die Ortsangabe oder die Geschwindigkeit bedürfen zu ihrer vollständigen Spezifikation der Angabe eines Betrages und einer Richtung. Solche Größen nennen wir Vektoren und kennzeichnen sie durch einen Pfeil über den Buchstaben, um die Bedeutung der Richtungsangabe hervorzuheben. So schreiben wir beispielsweise für den Ortsvektor $\vec{r}$, für die Geschwindigkeit $\vec{v}$, für die Beschleunigung $\vec{a}$ und für die Kraft $\vec{F}$ oder $\vec{K}$. Für den Impuls schreiben wir $\vec{p}$ und für den Drehimpuls $\vec{L}$. Ein Vektor verbindet zwei Punkte, z. B.



Den Betrag oder die Länge eines Vektors bezeichnen wir mit $|\vec{a}|$ oder a .

Wir wollen nun die einfachen Gesetze der Vektoralgebra behandeln.

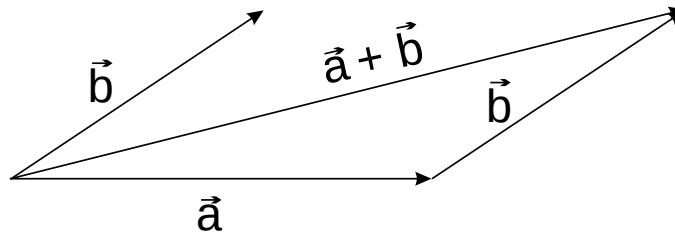
1. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, wenn sie den gleichen Betrag und die gleiche Richtung aufweisen unabhängig von ihrem Anfangspunkt. So haben auch zwei Autos die gleichen Geschwindigkeitsvektoren, wenn sie in die gleiche Richtung fahren mit dem gleichen Betrag der Geschwindigkeit. Dies ist bedauerlicherweise ein häufiges Vorkommnis, wenn zwei LKW versuchen, sich zu überholen. Alle gleichlangen und gleichgerichteten Strecken sind gleichberechtigte Darstellungen des selben Vektors.



chen Geschwindigkeitsvektoren, wenn sie in die gleiche Richtung fahren mit dem gleichen Betrag der Geschwindigkeit. Dies ist bedauerlicherweise ein häufiges Vorkommnis, wenn zwei LKW versuchen, sich zu überholen. Alle gleichlangen und gleichgerichteten Strecken sind gleichberechtigte Darstellungen des selben Vektors.

2. Einen Vektor, der die gleiche Länge wie der Vektor $\vec{a}$ aufweist, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt, bezeichnen wir mit $-\vec{a}$.

Wir behandeln nun einige elementare Rechenregeln bezüglich Vektoren. Wir beginnen mit der Addition von Vektoren. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man durch Parallelverschiebung den Fußpunkt des einen Vektors $\vec{b}$ mit der Pfeilspitze des anderen Vektors $\vec{a}$ zur Deckung bringt. Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ beginnt am Fußpunkt von $\vec{a}$ und reicht zur Spitze von $\vec{b}$. $\vec{a} + \vec{b}$ entspricht der Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Für die Vektorsumme gilt die

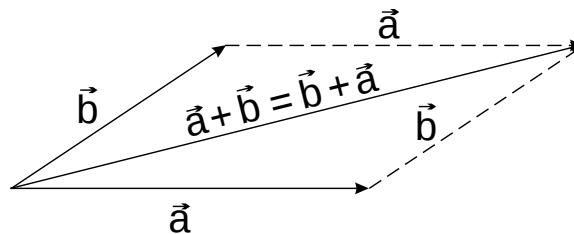


Entscheidend für die Kommutativität ist die freie Parallelverschiebbarkeit der Vektoren.

I. Kommutativität

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1.1)$$

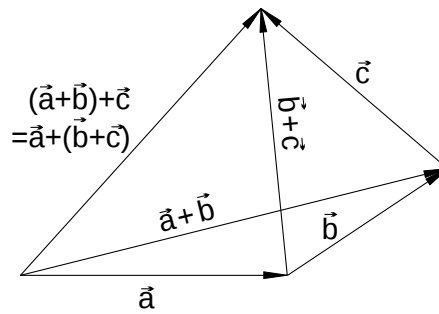
Entscheidend für die Kommutativität ist die freie Parallelverschiebbarkeit der Vektoren.



II. Assoziativität

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (1.2)$$

Wiederum überzeugt man sich aufgrund einer graphischen Veranschaulichung sofort von der Richtigkeit dieser Behauptung.



Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder die Vektorsubtraktion ist definiert als

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad . \quad (1.3)$$

Subtrahiert man $\vec{a}$ von sich selbst, so ergibt sich der Nullvektor

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}. \quad (1.4)$$

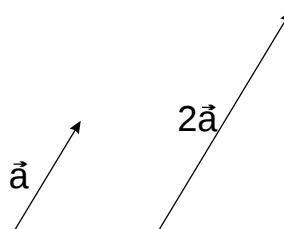
Der Nullvektor hat den Betrag 0; er ist richtungslos. Für alle Vektoren gilt

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \quad (1.5)$$

Unter dem Produkt $p\vec{a}$ eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar p , wobei p eine reelle Zahl ist, versteht man einen Vektor, der die gleiche Richtung aufweist wie $\vec{a}$ und den Betrag

$$|p\vec{a}| = |p| \cdot |\vec{a}| \quad (1.6)$$

hat.



Hierbei gilt das Distributivgesetz, d. h.

$$\begin{aligned} (p + q)\vec{a} &= p\vec{a} + q\vec{a}, \\ p(\vec{a} + \vec{b}) &= p\vec{a} + p\vec{b}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

sowie das Assoziativgesetz

$$q(p\vec{a}) = p(q\vec{a}) = qp\vec{a}. \quad (1.8)$$

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit der Länge 1. Aus jedem Vektor $\vec{a}$ lässt sich durch Multiplikation mit dem Kehrwert seines Betrages ein Einheitsvektor $\vec{e}_a$ in Richtung von $\vec{a}$ konstruieren.

$$\vec{e}_a = \frac{1}{a} \vec{a} \quad (1.9)$$

und damit auch

$$\vec{a} = a \vec{e}_a \quad (1.10)$$

mit

$$|\vec{e}_a| = \frac{a}{a} = 1. \quad (1.11)$$

Einheitsvektoren werden in der Regel mit den Buchstaben $\vec{e}$ oder $\vec{n}$ bezeichnet. In der englischen Literatur findet man vielfach auch die Bezeichnungen $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$. Eine andere häufige Bezeichnung ist beispielsweise $\hat{r}$.

Wir fassen die Gesetze der Vektoralgebra zusammen

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ | Kommutativgesetz der Addition |
| 2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ | Assoziativgesetz der Addition |
| 3. $p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a} = q(p\vec{a})$ | Assoziativgesetz der Multiplikation |
| 4. $(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$ | Distributivgesetz |
| 5. $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$ | Distributivgesetz |

Bislang haben wir Ortsvektoren als einen Spezialfall der Vektoren diskutiert. Der Zusammenhang mit dem abstrakten mathematischen Vektorbegriff ist leicht herstellbar. Die Gesamtheit der Vektoren bilden einen linearen Vektorraum V über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbf{R}$. Es werden die folgenden Axiome erfüllt:

- I) Zwischen zwei Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ist eine Verknüpfung (Addition) definiert

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{s} \in V \quad (1.12)$$

mit

- 1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Assoziativität)
- 2) Nullelement: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$
- 3) Inverses: Zu jedem $\vec{a} \in V$ gibt es ein $(-\vec{a}) \in V$, so daß gilt
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
- 4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativität)

II) Multiplikation mit Elementen $\alpha, \beta, \dots \in \mathbf{R}$:

$$\alpha \in \mathbf{R}, \vec{a} \in V \implies \alpha \vec{a} \in V$$

mit

- 1) $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$,
 $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$, (Distributivität)
- 2) $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$ (Assoziativität)
- 3) Es gibt ein Einselement 1, so daß gilt
 $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$.

1.2 Skalarprodukt von Vektoren

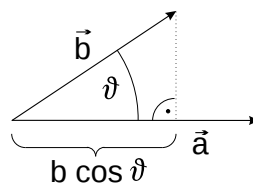
Wir haben bisher die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren betrachtet. Jetzt wenden wir uns der Multiplikation von Vektoren zu. Hierbei werden wir zwei unterschiedliche Typen von Produkten von Vektoren kennenlernen, das Skalarprodukt (inneres Produkt) und das Vektorprodukt (äußeres Produkt).

Als Skalarprodukt (inneres Produkt, Punktprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet man den folgenden Skalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \vartheta, \quad (1.13)$$

wobei ϑ den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kennzeichnet.

$$\vartheta = \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$



Anschaulich handelt es sich um das Produkt aus der Länge des ersten Vektors mit der Projektion des zweiten Vektors auf die Richtung des ersten. Offensichtlich gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad (1.14)$$

falls 1) $a = 0$ oder (und) $b = 0$

oder 2) $\vartheta = \pi/2$.

Basierend auf dieser Einsicht bezeichnen wir zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$) zueinander falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Eine wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts betrifft den Betrag eines Vektors. Wegen $\cos(0) = 1$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0. \quad (1.15)$$

Damit können wir schreiben

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (1.16)$$

Für den Einheitsvektor haben wir

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1. \quad (1.17)$$

Ein Vektorraum, in dem ein Skalarprodukt definiert ist, heißt unitärer Vektorraum.

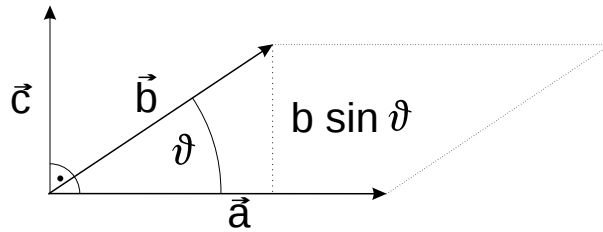
Einem Produkt von zwei Vektoren können wir jedoch auch einen Vektor zuordnen. Das Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ führt zu einem Vektor $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}. \quad (1.18)$$

Der Vektor $\vec{c}$ hat folgende Eigenschaften:

1. $c = ab \sin \vartheta$,

wobei ϑ wieder der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Der Betrag von $\vec{c}$, also c , entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.



2. $\vec{c}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.

Beispiele in der Physik für Größen, die durch Vektorprodukte definiert sind, sind

der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ mit
 dem Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ und
 das Drehmoment $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{K}$ bzw.
 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Wir wollen nun einige wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes diskutieren.

I) antikommutativ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (1.19)$$

II)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} 1) \quad a \text{ oder } b = 0 \\ 2) \quad \vec{b} = \alpha \vec{a}; \alpha \in \mathbf{R} \end{array} \quad (1.20)$$

Für kollineare Vektoren gilt $\sin \vartheta = 0$, da $\vartheta = 0$, und somit verschwindet das Kreuzprodukt.

III) distributiv:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (1.21)$$

IV) nicht assoziativ

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \quad (1.22)$$

V) bilinear

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (1.23)$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Basisvektoren näher beleuchten. Wir stellen den Vektor $\vec{a}$ durch den Einheitsvektor $\vec{e}_a$ dar, um Betrag- und Richtungsangabe etwas zu trennen

$$\vec{a} = a \vec{e}_a. \quad (1.24)$$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit derselben Richtung $\vec{e}$ heißen kollinear. Für sie lassen sich reelle Zahlen $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ finden, die die Gleichung

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \quad (1.25)$$

erfüllen. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig. Damit können wir umgedreht folgende Definition vereinbaren:

n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, heißen linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{a}_j = 0 \quad (1.26)$$

nur durch

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (1.27)$$

erfüllt werden kann. Andernfalls heißen sie linear abhängig.

Ferner gilt die Definition: Die Dimension eines Vektorraumes ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

In einem d -dimensionalen Vektorraum bildet jede Menge von d linear unabhängigen Vektoren eine Basis, d. h. jeder beliebige Vektor dieses Raumes läßt sich als Linearkombination dieser d Vektoren beschreiben.

Besonders bedeutsam als Basisvektoren sind Einheitsvektoren, die paarweise orthogonal zueinander sind. Man spricht in diesem Fall von einem Orthonormalsystem $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, d$. Damit gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.28)$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases} \quad (1.29)$$

Ein Orthonormalsystem, das gleichzeitig Basis des Vektorraumes V ist, bezeichnet man als vollständig. Für einen beliebigen Vektor $\vec{a} \in V$ gilt dann

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^d a_j \vec{e}_j . \quad (1.30)$$

Die a_j sind die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$. Beispielsweise bilden die kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ ein vollständiges Orthonormalsystem des E_3 . Die Komponentenschreibweise erlaubt eine gebräuchliche Darstellung des Vektors als Spaltenvektor:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

oder als Zeilenvektor:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d) .$$

Für den dreidimensionalen euklidischen Raum können wir somit explizit schreiben

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \\ &= \sum_{j=1}^3 a_j \vec{e}_j \end{aligned} \quad (1.31)$$

oder auch

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) .$$

Mit dem vollständigen Orthonormalsystem können wir auch den Betrag eines Vektors auswerten. Es ist

$$\begin{aligned} a &= |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 a_i a_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \delta_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \end{aligned} \quad (1.32)$$

Für die Richtungskosinusse erhalten wir mittels der kartesischen Komponenten a_i

$$a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a} = a \cos \vartheta_i \quad (1.33)$$

mit

$$\vartheta_i = \angle(\vec{e}_i, \vec{a}).$$

Damit folgt sofort

$$\cos \vartheta_i = \frac{a_i}{a}. \quad (1.34)$$

Ferner bekommen wir

$$\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_3 = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = 1. \quad (1.35)$$

Auch das Skalarprodukt lässt sich mit dem vollständigen Orthonormalsystem leicht auswerten. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sum_{j=1}^3 a_j b_j. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Wir studieren jetzt Vektorprodukte mit orthonormalen Basisvektoren, die ein Rechtssystem bilden. Es ist

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad (1.37)$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad (1.38)$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad (1.39)$$

aber zum Beispiel $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$ und $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0$. Multiplizieren wir den resultierenden Vektor wieder skalar mit $\vec{e}_i$, so folgt

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ zyklisch aus } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ antizyklisch aus } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \varepsilon_{ijk}. \quad (1.40)$$

ε_{ijk} ist das Levi-Civita Symbol oder der sogenannte total antisymmetrische Tensor dritter Stufe. Es ist also

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k). \quad (1.41)$$

Mit diesem Symbol lassen sich Vektorprodukte der Basisvektoren zusammenfassend formulieren:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k. \quad (1.42)$$

Für allgemeine Vektorprodukte gilt entsprechend

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k = \sum_{k=1}^3 c_k \vec{e}_k \quad (1.43)$$

mit der abkürzenden Schreibweise

$$c_k = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \quad (1.44)$$

oder ausführlich

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (1.45)$$

Das Kreuzprodukt läßt sich auch leicht mit Hilfe der Determinantenschreibweise auswerten. Ein rechteckiges Schema von Zahlen wird Matrix genannt.

$$\begin{array}{c} \text{Spalten} \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{array} \right) \leftarrow \text{Zeilen} \end{array}$$

Der erste Index des Koeffizienten gibt die Zeile an, der zweite die Spalte. Für den Fall, daß $q = p$ ist, spricht man von einer quadratischen Matrix. Dieser Matrix läßt sich ein Zahlenwert D zuordnen, der Determinante genannt wird. Für die Dimensionen 1, 2 und 3 läßt sich dieser Wert folgendermaßen auswerten

$$1.) \quad \det(a_{11}) \equiv |a_{11}| = a_{11} \quad , \quad (1.46)$$

$$2.) \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad , \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} 3.) \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (1.48) \end{aligned}$$

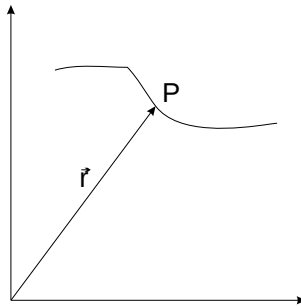
Mit Hilfe der Determinantenschreibweise können wir das Vektorprodukt auch formal auswerten durch

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 .\end{aligned}\quad (1.49)$$

Dies ist identisch mit dem bereits abgeleiteten Resultat.

1.3 Vektorfunktionen

Wir betrachten nun Vektoren, die eine Abhängigkeit von äußeren Parametern aufweisen. Ein typisches Beispiel hierzu sind Raumkurven. Wir wählen im dreidimensionalen euklidischen Raum ein festes Koordinatensystem. Die Position eines Teilchens, idealisiert durch einen Massenpunkt, legen wir durch den Ortsvektor fest.

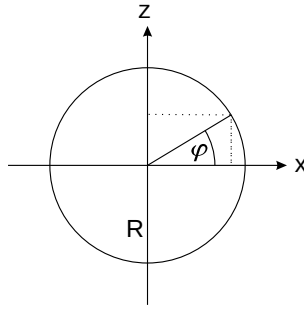


Der Ortsvektor kann sich als Funktion der Zeit als äußerer Parameter ändern. In einem zeitunabhängigen, vollständigen Orthonormalsystem $\vec{e}_i$ werden die Komponenten des Vektors zeitabhängige Funktionen, z. B.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \sum_{j=1}^3 x_j(t) \vec{e}_j = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ &= (x(t), y(t), z(t)) .\end{aligned}\quad (1.50)$$

Dies nennt man die Trajektorie oder die Bahnkurve des Teilchens.

Ein weiteres Beispiel für eine Raumkurve ist die Kreisbewegung in der xz -Ebene.

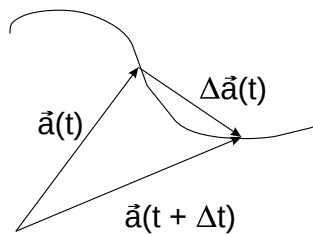


Der Kreis habe den Radius R . Eine naheliegende Parametrisierung über den Winkel φ lautet

$$\vec{r}(\varphi) = R(\cos \varphi, 0, \sin \varphi) \quad . \quad (1.51)$$

Wir untersuchen jetzt die Ableitung derartiger vektorwertiger Funktionen. Speziell untersuchen wir Vektoren $\vec{a}$ zu verschiedenen Zeiten t bzw. $t + \Delta t$ und bilden den Differenzvektor

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t) \quad . \quad (1.52)$$



Dies erlaubt es uns über den Grenzübergang $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ zu definieren

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} \quad . \quad (1.53)$$

↑

Vektor

Für die Zeitableitung schreibt man auch kurz

$$\dot{\vec{a}}(t) \equiv \frac{d\vec{a}}{dt} \quad . \quad (1.54)$$

Stellen wir $\vec{a}(t)$ in einem zeitunabhängigen Basissystem $\{\vec{e}_i\}$ dar

$$\vec{a}(t) = \sum_{j=1}^3 a_j(t) \vec{e}_j \quad , \quad (1.55)$$

so folgt

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \sum_j \dot{a}_j(t) \vec{e}_j \quad . \quad (1.56)$$

Es gelten die folgenden Ableitungsregeln

$$\frac{d}{dt}[f(t) \vec{a}(t)] = \dot{f}(t) \vec{a}(t) + f(t) \dot{\vec{a}}(t) \quad , \quad (1.57)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t) \quad , \quad (1.58)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t) \quad . \quad (1.59)$$

Für die Physik bedeutsame Beispiele sind die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) \quad (1.60)$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \quad . \quad (1.61)$$

Auch die Integration von vektorwertigen Funktionen läßt sich auf die der entsprechenden parameterabhängigen Komponentenfunktionen übertragen

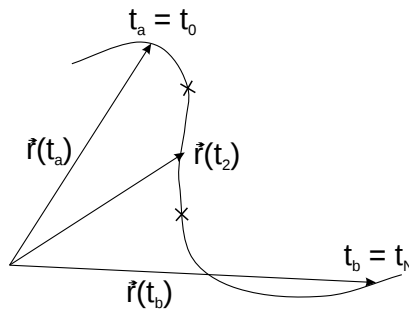
$$\int_{t_a}^{t_b} \vec{a}(t) dt = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \int_{t_a}^{t_b} a_j(t) dt \quad . \quad (1.62)$$

↑

Vektor

Wenn die Basisvektoren parameterunabhängig sind, können sie vor das Integral gezogen werden. Oft bietet es sich an, die Bogenlänge als Kurvenparameter einzuführen; diese wollen wir jetzt einführen.

Die Bogenlänge s ist die Länge der Raumkurve ausgehend von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt.



Wir zerlegen zunächst das Zeitintervall von t_a bis t_b in N Zeitintervalle Δt_n

$$t_b - t_a = N \Delta t_n \quad . \quad (1.63)$$

Für die einzelnen Markierungen auf der Raumkurve gilt

$$t_n = t_a + n \Delta t_n \quad (1.64)$$

mit

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

und

$$\begin{aligned} t_0 &= t_a \quad , \\ t_N &= t_b \quad . \end{aligned}$$

Die Zeitmarkierungen entsprechen den Ortsvektoren $\vec{r}(t_n)$. Wenn wir diese linear miteinander verbinden, so ergibt sich ein Polygonzug der Länge

$$L_N(t_a, t_b) = \sum_{n=0}^{N-1} |\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)| = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_n} \right| \Delta t_n \quad . \quad (1.65)$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ entspricht die Länge L_N des Polygonzuges der Bogenlänge s zwischen den Endpunkten $\vec{r}(t_a)$ und $\vec{r}(t_b)$. Für $N \rightarrow \infty$ geht aber Δt_n gegen Null. Damit wird

$$\frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty, \Delta t_n \rightarrow 0} \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_n} \quad . \quad (1.66)$$

Aus der Summe wird im Riemannschen Sinne ein Integral.

$$s(t_b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_n} \right| \Delta t_n = \int_{t_a}^{t_b} \left| \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right| dt' \quad . \quad (1.67)$$

Schreiben wir für $t_b = t$, so haben wir schließlich als Bogenlänge

$$s(t) = \int_{t_a}^t \left| \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right| dt' \quad . \quad (1.68)$$

Für die differentielle Änderung der Bogenlänge gilt einfach

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \quad . \quad (1.69)$$

Durch die Substitution von t durch s können wir eine natürliche Parametrisierung einer Raumkurve erhalten. Betrachten wir nur den infinitesimalen Ausdruck ds , so haben wir offensichtlich

$$ds = |d\vec{r}(t)| \quad . \quad (1.70)$$

Im euklidischen Raum führt dies bei Verwendung von kartesischen Koordinaten auf

$$ds = |d\vec{r}(t)| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad . \quad (1.71)$$

Dies spiegelt einfach nur den Satz von Pythagoras in drei Dimensionen wieder.

Als konkretes Anwendungsbeispiel betrachten wir die Kreisbewegung gleichförmiger Art mit

$$\varphi = \omega t \quad . \quad (1.72)$$

Der Winkel φ ändert sich gleichförmig mit der Zeit t , sofern die Größe ω konstant als Funktion der Zeit ist. Damit folgt für den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = R(\cos \varphi, 0, \sin \varphi) = R(\cos \omega t, 0, \sin \omega t) \quad . \quad (1.73)$$

Es ergibt sich weiter

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\omega(-\sin \omega t, 0, \cos \omega t) \quad (1.74)$$

und für den Betrag

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = R\omega \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = R\omega \quad . \quad (1.75)$$

Entsprechend der Definition für die Bogenlänge bekommen wir

$$s(t) = \int_{t_a}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt'} \right| dt' = \int_0^t R\omega dt' = R\omega t \quad (1.76)$$

mit der willkürlichen Festlegung

$$t_a = 0 \quad .$$

Wir lösen auf, dies führt auf

$$t(s) = \frac{s}{R\omega} \quad . \quad (1.77)$$

Schließlich bekommen wir die natürliche Darstellung der Kreisbewegung durch die Bogenlänge

$$\vec{r}(s) = R\left(\cos \frac{s}{R}, 0, \sin \frac{s}{R}\right) \quad . \quad (1.78)$$

Nach einem vollen Umlauf muß

$$\varphi = 2\pi = \omega t = \frac{s}{R} \quad (1.79)$$

sein. Das entspricht der Bogenlänge $s = 2\pi R$, also dem Umfang des Kreises.

1.4 Mechanik des freien Massenpunktes

Unter einem Massenpunkt verstehen wir einen physikalischen Körper mit einer Masse m , aber mit einer allseitig vernachlässigbaren Ausdehnung. Diese Idealisierung ist nicht auf kleine Körper beschränkt, sondern kann sogar die Bewegung von Galaxienhaufen umfassen, also die größten Himmelskörper überhaupt. Als Idealisierung betrachtet man hier z. B. nur die Bewegung des Schwerpunktes oder die des Zentrums.

Wir bezeichnen ferner einen Massenpunkt als frei, wenn er den einwirkenden Kräften ohne einschränkende Zwangsbedingungen folgen kann. Die Bewegung des Massenpunktes ist charakterisiert durch den

1. Ortsvektor: $\vec{r}(t)$
2. Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$,
3. Beschleunigungsvektor: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.

Höhere Zeitableitungen spielen in der Physik keine Rolle.

Die für die Mechanik typische Aufgabenstellung besteht nun darin, aus einer vorgegebenen Beschleunigung $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ oder Kraft $\vec{K} = m\vec{a}$ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ zu berechnen. Umgekehrt kann man aus einer vorgegebenen Bahnkurve $\vec{r}(t)$ auf die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ bzw. auf die wirkende Kraft $\vec{K} = m\vec{a}$ schließen. Liegt die Beschleunigung vor, so muß man $\vec{a}(t)$ offensichtlich zeitlich integrieren, um $\vec{r}(t)$ zu bestimmen. Bei jeder dieser Integrationen erscheint eine Integrationskonstante, die erst bestimmt wird, wenn wir zusätzlich zu $\vec{a}(t)$ noch zwei Anfangsbedingungen vorgeben. Wir nehmen an, wir kennen die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und den Ort $\vec{r}$ des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 . Es ist also

$$\vec{a}(t) \text{ für alle } t, \vec{v}(t_0), \vec{r}(t_0)$$

bekannt. Dann ergibt sich für die Geschwindigkeit des Teilchens

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' \quad . \quad (1.80)$$

Für den Ortsvektor erhalten wir durch weitere Zeitintegration

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt'' \right] dt' \quad . \quad (1.81)$$

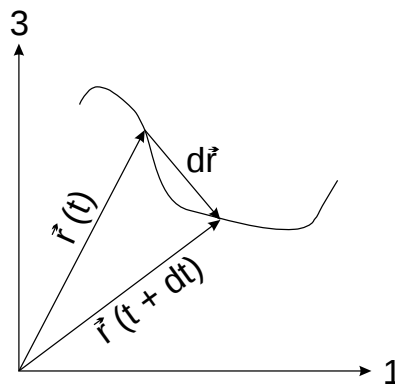
In kartesischen Koordinaten wird die Bahnkurve durch die drei zeitabhängigen Komponentenfunktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ beschrieben

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \sum_{j=1}^3 x_j(t) \vec{e}_j \quad . \quad (1.82)$$

Die Basisvektoren sind zeitunabhängig und raumfest. Die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j(t) \vec{e}_j \quad (1.83)$$

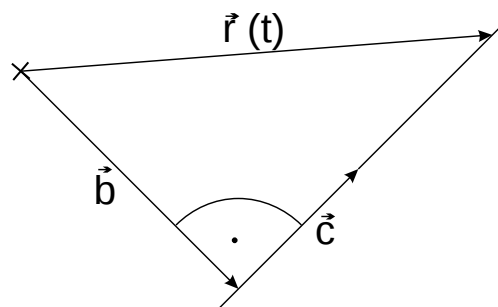
ist ein Vektor, der tangential zur Bahnkurve orientiert ist.



Beim Meßprozeß zur Festlegung der Geschwindigkeit sollte nicht vergessen werden, daß der Grenzprozeß bei der Ableitungsbildung experimentell generell nicht vollzogen wird, sondern daß die Messung stets in endlichen Zeitintervallen durchgeführt wird. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit führt auf die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \sum_{j=1}^3 \ddot{x}_j(t) \vec{e}_j \quad . \quad (1.84)$$

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Geraden. Wir können die Bewegung beschreiben, ohne auf ein spezielles Koordinatensystem Bezug zu nehmen.



$\vec{c}$ sei ein Vektor in Richtung der Bewegung, $\vec{b}$ ein Vektor senkrecht dazu. Für den Ortsvektor des Massenpunktes gilt dann

$$\vec{r}(t) = \vec{b} + \alpha(t)\vec{c} \quad . \quad (1.85)$$

$\alpha(t)$ ist ein Koeffizient, der den zeitlichen Verlauf widerspiegelt. Daraus ergeben sich durch entsprechende Zeitableitungen Geschwindigkeit und Beschleunigung zu

$$\vec{v} = \dot{\alpha}(t)\vec{c} \quad , \quad (1.86)$$

$$\vec{a} = \ddot{\alpha}(t)\vec{c} \quad . \quad (1.87)$$

Ein weiterer Spezialfall ist die gleichförmige geradlinige Bewegung. Es ist die einfachste Bewegungsform ohne jegliche Beschleunigung.

$$\vec{a}(t) = 0 \quad , \quad (1.88)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \quad \text{für alle } t \quad . \quad (1.89)$$

Die Bewegung erfolgt also geradlinig in Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_0$. Man nennt sie gleichförmig, weil in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden.

Als nächstes Beispiel beschränken wir uns auf die gleichförmig beschleunigte Bewegung. Wir nehmen eine konstante Beschleunigung an

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 \quad . \quad (1.90)$$

Dieser Fall kommt recht häufig in der Physik vor und ist daher von maßgeblicher Bedeutung. Ein Beispiel hierzu ist der freie Fall auf die Erde aufgrund der konstanten Erdbeschleunigung $\vec{a}_0 = \vec{g}$ mit $|\vec{g}| \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Für die Zeitintegrale über die Beschleunigung folgt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt'' \right] dt' &= \int_{t_0}^t [\vec{a}_0(t' - t_0)] dt' \\ &= \vec{a}_0 \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 \right) - \vec{a}_0 t_0(t - t_0) = \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (1.91)$$

Wir erhalten damit als Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 \quad . \quad (1.92)$$

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes nimmt linear mit der Zeit zu

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0) \quad . \quad (1.93)$$

2 Newtonsche Mechanik und der freie Fall

2.1 Grundgesetze der Newtonschen Dynamik

Wir haben uns bereits mit der Bewegung eines Massenpunktes beschäftigt. Dabei gingen wir aus von den Grundgrößen Länge, Zeit und Masse und haben daraus andere Größen abgeleitet. Im Zentrum der Betrachtungen standen dabei die Weg-Zeit-Gesetze. Die Ursache für diese Bewegung, die Kraft, haben wir bislang außer acht gelassen. Wir werden nun ausgehend von den Grundgrößen Gesetze der Dynamik ableiten bzw. diskutieren, die das Grundgerüst der Newtonschen Mechanik repräsentieren. Die theoretische Beschreibung muß sich zwangsläufig am Experiment messen. Erst der Grad der Übereinstimmung einer theoretischen Formulierung mit experimentellen Daten erlaubt eine Aussage über deren Richtigkeit. Dabei kann streng genommen eigentlich niemals von einer echten Verifikation gesprochen werden.

Wir gehen jetzt von der Kraft als vektorieller Größe aus. Die Kraft wirkt in einer gewissen Richtung. Kräfte sind im Alltagsverständnis die Ursache der Bewegung. Wir führen jetzt die aus der Erfahrung erwachsenen Newtonschen Axiome der Mechanik an.

Axiom 1 oder lex prima oder Galileisches Trägheitsgesetz:

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Etwas mehr einschränkend schreiben wir: Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Körper (Massenpunkt) im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt. Solche Systeme sollen Inertialsysteme heißen.

Den Trägheitswiderstand, den ein Körper einer Beschleunigung entgegensetzt, nennen wir Masse, genauer träge Masse. Jeder Körper besitzt eine skalare Eigenschaft, gegeben durch eine positive reelle Zahl, die wir die träge Masse m_t nennen. Das Produkt aus träger Masse und Geschwindigkeit eines Teilchens heißt Impuls:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad . \quad (2.1)$$

Hierzu gilt das

Axiom 2 oder lex secunda oder das Bewegungsgesetz:

Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegendes Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m_t \vec{v}) \quad . \quad (2.2)$$

Falls die Masse nicht zeitabhängig ist, folgt

$$\vec{F} = m_t \ddot{\vec{r}} = m_t \vec{a} \quad . \quad (2.3)$$

Dies ist die Grundgleichung der klassischen Mechanik. Oft genug ist aber auch die Masse m_t zeitabhängig, wie z. B. bei einem fahrenden Auto, das durch Treibstoffverbrauch leichter wird als Funktion der Zeit. Bisher haben wir nur die Wirkung einer Kraft auf einen Massenpunkt diskutiert, nicht jedoch die Rückwirkung derselben auf die Kraftquelle. Es gilt das

Axiom 3 oder lex tertia oder das Reaktionsprinzip oder actio = reactio:

Es sei

$\vec{F}_{12}$: Kraft des Körpers 2 auf Körper 1

$\vec{F}_{21}$: Kraft des Körpers 1 auf Körper 2.

Dann gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad .$$

Damit folgt für $m_t = \text{constant}$

$$m_{t,1} \vec{a}_1 = -m_{t,2} \vec{a}_2 \quad . \quad (2.4)$$

Als Einheitensystem zur Messung der angesprochenen dynamischen Größen verwenden wir im allgemeinen SI-Einheiten.

$$[m_t] = \text{kg}$$

$$[\vec{r}] = \text{m}$$

$$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$[\vec{F}] = \text{N} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$[\vec{p}] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ferner gilt das

Axiom 4 oder Corollarium oder das Superpositionsprinzip.

Wirken auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, so addieren sich diese wie Vektoren zu einer Resultanten oder Resultierenden

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad . \quad (2.5)$$

Wir führen etwas allgemeiner das Kraftfeld ein

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad .$$

Jedem Punkt des Raumes wird eine im allgemeinen sogar zeitlich veränderliche auf den Massenpunkt wirkende Kraft zugeordnet, die zusätzlich auch noch von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen kann.

Des weiteren gehen wir von der empirischen Einsicht aus, das jeder Körper schwer ist. Dies manifestiert sich in der Schwerkraft

$$\vec{F} = m_s \vec{g} \quad , \quad (2.6)$$

die im Schwerefeld der Erde auf einen Massenpunkt wirkt. $\vec{g}$ ist in der Nähe der Erdoberfläche ein nahezu konstanter Vektor, der in Richtung Erdmittelpunkt zeigt. Definiert man diese Richtung als negative x_3 -Richtung in einem kartesischen Koordinatensystem, so gilt:

$$\vec{g} = -(0, 0, g)$$

mit der Erdbeschleunigung

$$g = 9.8062 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad .$$

Als Gewicht eines Körpers bezeichnet man die Kraft $\vec{F}$, die auf diesen an der Erdoberfläche wirkt.

Die Identität

$$m_s = m_t = m$$

ist keine Selbstverständlichkeit. Es könnte im Prinzip ein materialabhängiger Unterschied auftreten. Nach der gegenwärtigen Meßsituation sind m_s und m_t gleichwertig. Dies ist auch der Inhalt des Einsteinschen Äquivalenzprinzips ($m_s = m_t$). Dieses Prinzip bildet die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

Für Zentralkräfte gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r, \dot{r}, t) \cdot \vec{r} \quad . \quad (2.7)$$

Diese in der Natur sehr häufig auftretenden Krafttypen zeigen in Richtung des Ortsvektors. Das Zentrum wird bei $\vec{r} = 0$ angenommen. Beispielsweise gilt für die Gravitationskraft

$$f(r) = -\gamma \frac{mM}{r^3} \quad , \quad (2.8)$$

$$\gamma = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad , \quad (2.9)$$

wobei die Kraft ausgeübt wird von der Masse M im Koordinatenursprung auf ein Teilchen mit der Masse m am Ort $\vec{r}$.

2.2 Inertialsysteme und Galilei-Transformation

Bewegung ist ein relativer Begriff. Die Bewegung eines Körpers kann nur relativ zu einem Bezugssystem definiert werden. Koordinatensysteme können im Prinzip frei gewählt werden. Die natürlichen Systeme der Mechanik sind die durch Axiom 1 eingeführten Inertialsysteme, in denen sich ein kräftefreier Massenpunkt mit

$$\vec{v} = \text{const.}$$

auf einer Geraden bewegt. Nicht alle Koordinatensysteme sind auch Inertialsysteme. Wir nehmen an, es gibt zumindest ein Inertialsystem, z. B. dasjenige, in dem die Fixsterne ruhen. Hier verbirgt sich die Newtonsche Fiktion vom absoluten Raum.

Als konkretes Anwendungsbeispiel für die Newtonsche Mechanik wollen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Fall des senkrechten Wurfes und des schrägen Wurfes studieren. Nach den Newtonschen Axiomen schreiben wir für den senkrechten Wurf

$$\vec{F} = -m_s g \vec{e}_3 = m_t \ddot{z} \vec{e}_3 \quad . \quad (2.10)$$

Wir wollen diese Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$z(t=0) = 0 \quad (2.11)$$

und

$$\dot{z}(t=0) = v_0 \quad (2.12)$$

lösen. Wir hatten allgemein für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eines Teilchens gefunden

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0) \quad . \quad (2.13)$$

Jetzt gilt in unserem Fall $t_0 = 0$ und $\vec{v}(t_0) = v_0 \vec{e}_3$ sowie $\vec{a}_0 = -g \vec{e}_3$. Damit resultiert

$$\dot{z}(t) = v_0 - gt \quad . \quad (2.14)$$

Die geforderte Anfangsbedingung ist offensichtlich erfüllt. Für den Ortsvektor hatten wir als Bahnkurve erhalten

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_0(t - t_0)^2 \quad . \quad (2.15)$$

Mit $\vec{r}(t_0) = (0, 0, 0)$ führt dies auf

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \quad (2.16)$$

Selbstverständlich resultiert dies auch aus (2.14) durch direkte Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung. Die Steigzeit $t = T$ beim senkrechten Wurf lässt sich ermitteln, indem wir berücksichtigen, daß am Umkehrpunkt die Geschwindigkeit null wird

$$\dot{z}(T) = 0 \quad . \quad (2.17)$$

Damit bekommen wir aus (2.14)

$$0 = v_0 - gT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{v_0}{g} \quad . \quad (2.18)$$

Setzen wir die Steigzeit in (2.16) ein, so erhalten wir die maximale Steighöhe

$$h = z(T) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} \quad . \quad (2.19)$$

Aus der Gleichung (2.14) folgt

$$t = \frac{v_0 - v}{g} \quad . \quad (2.20)$$

Dies erlaubt es die Koordinate z als Funktion der Geschwindigkeit anzugeben

$$\begin{aligned} z &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0(v_0 - v)}{g} - \frac{1}{2}g \frac{(v_0 - v)^2}{g^2} \\ &= \frac{2v_0^2 - 2v_0v - v_0^2 - v^2 + 2v_0v}{2g} = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Mit $h = \frac{v_0^2}{2g}$ ergibt sich

$$z = h - \frac{v^2}{2g} \quad . \quad (2.22)$$

Dies können wir umkehren und nach v auflösen

$$v(z) = \sqrt{2g(h - z)} \quad . \quad (2.23)$$

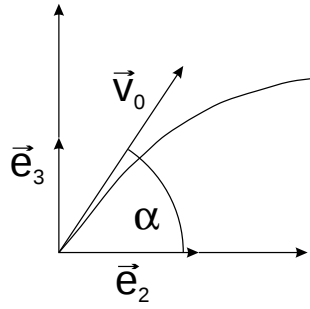
Als weiteres einfaches Problem der Newtonschen Mechanik behandeln wir jetzt den schrägen Wurf.

Die Anfangsgeschwindigkeit hat hier im Gegensatz zum senkrechten Wurf zwei Komponenten (in $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ -Richtung). Als Anfangsbedingung legen wir fest: Zum Zeitpunkt

$$t = 0$$

sei

$$\vec{r}(t = 0) = 0$$



und

$$\dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0 (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3) \quad . \quad (2.24)$$

α bezeichnet den Abwurfwinkel. Wieder gilt nach Newton

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \vec{e}_3$$

oder

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g \vec{e}_3 \quad . \quad (2.25)$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten

$$\vec{v}(t) = -gt \vec{e}_3 + \vec{c}_1 \quad . \quad (2.26)$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich für $\vec{c}_1$

$$\vec{c}_1 = \vec{v}_0 = v_0 (\cos \alpha \vec{e}_2 + \sin \alpha \vec{e}_3) \quad . \quad (2.27)$$

Somit folgt zusammengefaßt

$$\vec{v}(t) = (v_0 \sin \alpha - gt) \vec{e}_3 + v_0 \cos \alpha \vec{e}_2 \quad . \quad (2.28)$$

Die Steigzeit T erhalten wir wieder, indem wir die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit null setzen, also

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{v}(T) = 0 \quad . \quad (2.29)$$

Man erhält sofort

$$T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad . \quad (2.30)$$

Der Weg als Funktion der Zeit ergibt sich durch Integration der Gleichung (2.28)

$$\vec{r}(t) = (v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2) \vec{e}_3 + v_0 t \cos \alpha \vec{e}_2 \quad . \quad (2.31)$$

Da $\vec{r}(t=0) = 0$ ist, muß auch die Integrationskonstante gleich Null sein.

Die Form der Bewegungskurve ergibt sich, wenn wir die Bewegung hinsichtlich der Komponenten $z(t)$ und $y(t)$ aufspalten und dann die Zeit eliminieren, um einen Zusammenhang $z(y)$ abzuleiten. Es ist

$$y = tv_0 \cos \alpha \quad (2.32)$$

und somit

$$t = \frac{y}{v_0 \cos \alpha} \quad . \quad (2.33)$$

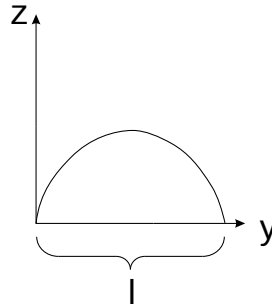
Für die z -Komponente gilt

$$z = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad . \quad (2.34)$$

Wir setzen t ein und bekommen

$$\begin{aligned} z &= v_0 \frac{y}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} y^2 + \tan \alpha y \quad . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Diese Gleichung ist eine Parabelgleichung der Form $-Ay^2 + By = z$, also eine nach unten geöffnete Parabel in der $y - z$ -Ebene.



Die Wurfzeit t_0 , die verstreicht, bis der Körper den Boden wieder erreicht, erhält man aus der Bedingung $z(t) = 0$ für $t \neq 0$. Es ist dann

$$v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2 = 0 \quad (2.36)$$

und somit

$$t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2T \quad . \quad (2.37)$$

Die Wurfzeit ist die doppelte Steigzeit, somit ist die Kurve der Wurfbewegung symmetrisch. Die Wurfweite l ergibt sich durch Einsetzen der Wurfzeit $2T$ in $y(t)$ (2.32)

$$l = 2T v_0 \cos \alpha = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \quad . \quad (2.38)$$

Unter Ausnutzung der trigonometrischen Relation

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.39)$$

können wir auch schreiben

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad . \quad (2.40)$$

Hieraus ist sofort zu verstehen, daß sich eine maximale Wurfweite bei konstantem v_0 für den Wurfwinkel $\alpha = 45^\circ$ ergibt, denn für $\sin 2\alpha = 1$ ist $\alpha = 45^\circ$.

2.3 Reibung

Bislang sind wir von der idealisierenden Annahme einer Bewegung ohne jegliche Reibung ausgegangen. Jeder bewegte makroskopische Körper wird durch Wechselwirkung mit seiner Umgebung gebremst. Auch beim schrägen Wurf wird die Luftreibung die Bewegung modifizieren. Es treten also bei der Bewegung Reibungskräfte auf, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt sind. Jeder weiß aufgrund der Alltagserfahrung, daß durch Reibung Wärme entsteht. Damit verlassen wir eigentlich den Rahmen der Mechanik und müßten auch thermodynamische Gesetze behandeln. Ferner müßten wir auch innere Freiheitsgrade des Körpers in Rechnung stellen. Dennoch wollen wir uns im Rahmen dieser Vorlesung allein auf die Konsequenzen der Reibung im Rahmen der Mechanik beschränken. In zähen Medien gilt als empirischer Sachverhalt in sehr guter Näherung der Ansatz

$$\vec{F}_R = -\alpha(v)\vec{v} \quad . \quad (2.41)$$

$\alpha(v)$ muß dabei empirisch bestimmt werden. Spezielle Formen sind folgende Ansätze

1. Stokessche Reibung

$$\vec{F}_R = -\alpha\vec{v} \quad . \quad (2.42)$$

Hier ist der Koeffizient $\alpha(v)$ konstant. Für die Brauchbarkeit dieses Ansatzes muß die Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers eine gewisse, vom reibenden Material abhängige Grenzgeschwindigkeit überschreiten.

2.1. Der waagerechte Wurf in vektorieller Darstellung

2.1.1. Elementare Darstellung der Bewegungsgesetze

Der waagerechte Wurf einer Kugel (Massenpunkt) im Labor folgt zeitlich der dargestellten Bahnkurve. Die Orts- oder Bahnkurve wird dargestellt im zweidimensionalen Ortsraum (Konfigurationsraum), aufgespannt durch ein rechtwinkliges, orthogonales Koordinatensystem (x-y-System).

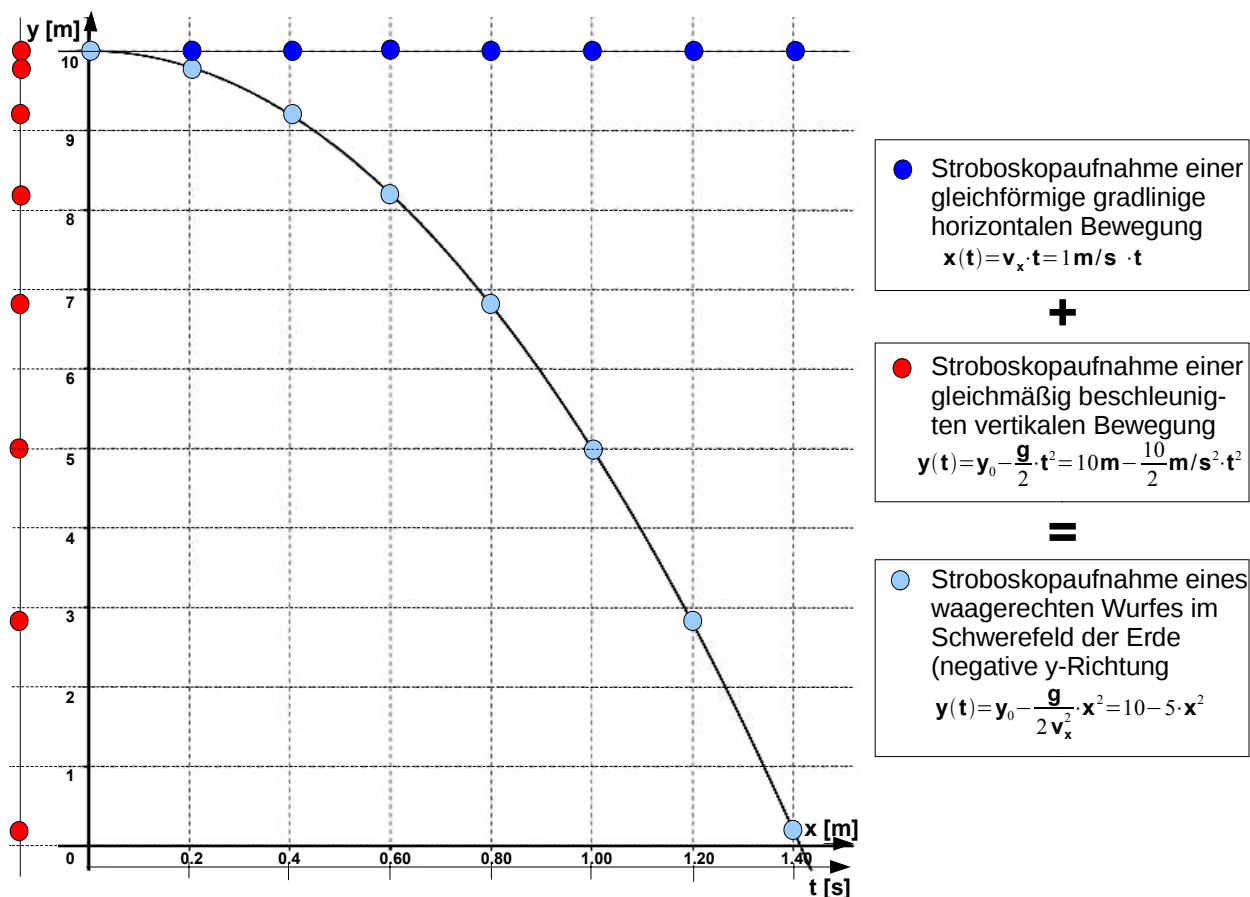


Abb. 2.1.1: Die Bewegung einer waagrecht abgeschossenen Kugel wird mit einer Stroboskopkamera aufgenommen. Im zeitlichen Abstand von 0,2 Sekunden erfolgt das An- und Abschalten eines Lichtblitzes. Die Positionen dieser Momentaufnahmen, bezogen auf ein Koordinatensystem, markieren die Spur der die Kugel in Raum (Ebene) und Zeit (Stroboskoppunkte) folgt. Der Kurvenverlauf kann durch ein Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in x-Richtung und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in negativer y-Richtung mathematisch ermittelt und geometrisch dargestellt werden. Der zeitliche Verlauf einer (nur) vertikalen gleichmäßig beschleunigten Bewegung (linke Stroboskopaufnahme) stimmt mit der vertikalen Komponente der Wurfkurve überein. Daraus folgt: Die beiden Bewegungen sind unabhängig voneinander.

Die **Unabhängigkeit** der beiden Bewegungen erlaubt die getrennte Berechnung der zeitlichen und räumlichen Entwicklung der x-Komponente der Geschwindigkeit aus der gleichförmigen Horizontalbewegung $x(t)$ und die y-Komponente aus der vertikalen beschleunigten Bewegung $y(t)$ des Massenpunktes.

$$x(t) = v_x \cdot t = 1 \text{ m/s} \cdot t$$

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 10 \text{ m} - 5 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Aus den Zeit-Weg-Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ wird jede Geschwindigkeitskomponenten durch Differentiation einzeln ermittelt zu

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = v_x$$

$$v_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y} = -g \cdot t$$

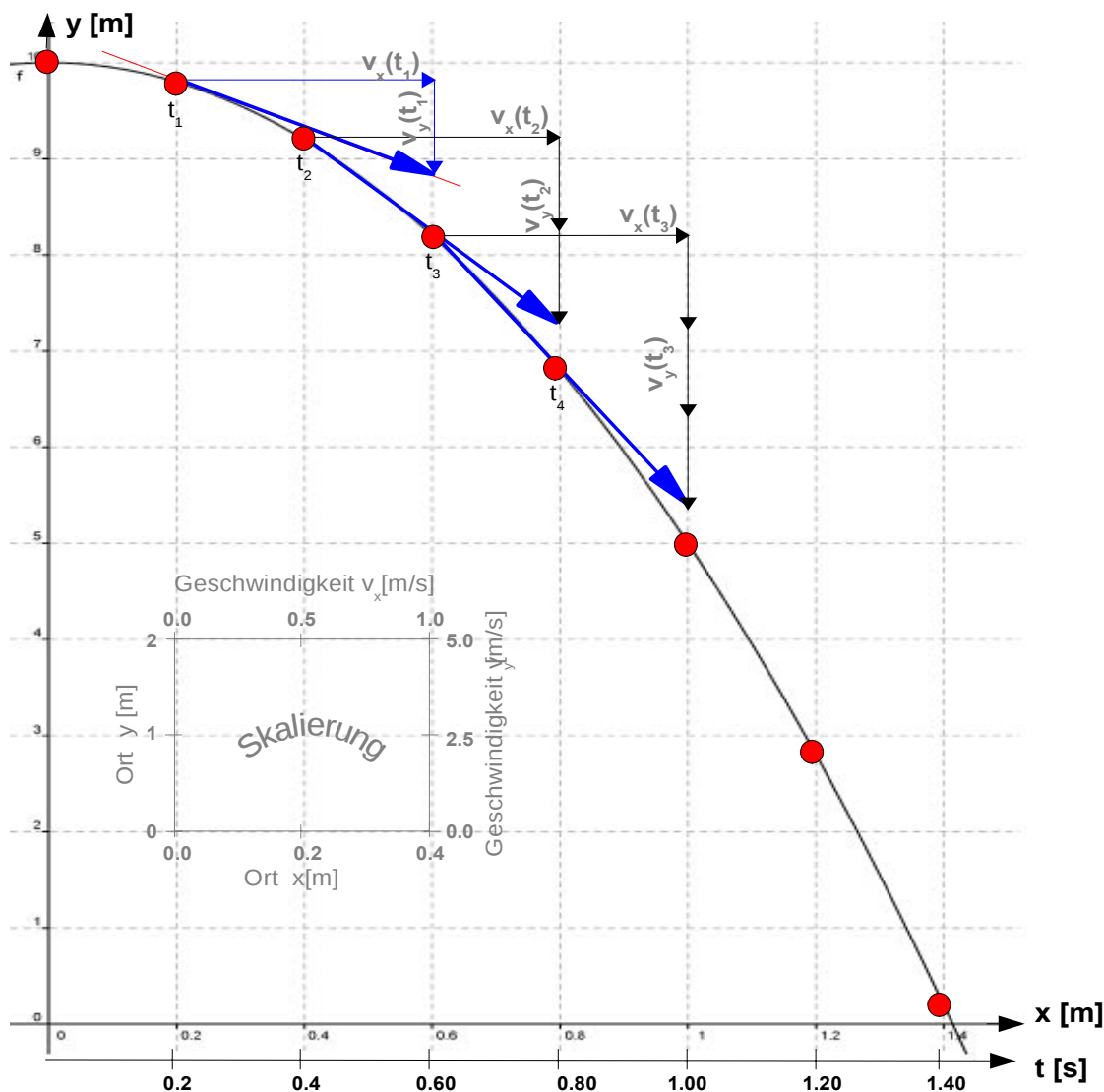


Abb. 2.1.2: Für den Zeitpunkt $t_1 = 0,2 \text{ s}$ ergeben sich eine horizontale konstante Geschwindigkeit $v_x(t) = v_x = 1 \text{ m/s}$ und eine linear veränderliche vertikale Geschwindigkeit $v_y(t) = -gt = -2 \text{ m/s}$. Die Geschwindigkeitsvektoren geben im Ortsdiagramm die zum Zeitpunkt gehörende momentane Richtung an. Da die Geschwindigkeitsvektoren eine andere Maßeinheit als der Weg (Ort) Vektoren haben, müssen ihre Längen nach einer eigenen Skalierung/Maßeinheit im gleichen Maßstabsverhältnis (x/y) berechnet werden. Wir haben jetzt **zwei übereinander liegende Koordinatensysteme**, das eine für die Ortsentwicklung der Bewegung, die Spur $y(x)$ und das andere für die Geschwindigkeitsentwicklung der Bewegung.

gleichzeitig überlagernden Gesamtbewegung und bedarf keiner zusätzlichen Mathematik.

Im folgenden wird jedoch ein weiterer mathematischer Kalkül verwendet, die **Vektoranalysis** (Vektorrechnung). Sie erlaubt eine verkürzte Schreibweise der Bewegungsgleichungen von mehreren sich überlagernden Einzelbewegungen. In dieser Schreibweise ist das Unabhängigkeitsprinzip von Bewegungen quasi per Definitionem eingebaut und erlaubt die Regeln der Differentialrechnung der Analysis anzuwenden.

2.1.2. Darstellung der Bewegungsgesetze mit Hilfe des Vektorkalkül

Die Ort-Zeit-Funktion wird in der zweidimensionalen Ebene (z.B. waagerechter Wurf) durch die Vektorfunktion beschrieben.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Die Zeit als Parameter. Jedem Ortspunkt $\{x(t) | y(t)\}$ wird ein Zeitpunkt t zugeordnet. Dargestellt wird die Ortskurve (z.B. Spur einer waagrecht geworfene Kugel im Schwerfeld) in der zweidimensionalen Ebene. Die zeitliche Abhängigkeit wird durch Zeitmarken (sogen. Stroboskoppunkte) auf der Spur des Ortskurvenverlaufs dargestellt.

Beispiel:

Ortskurvenverlauf beim waagerechten Wurf (Ausschnitt).

Zwei Zeitmarken P1(0,2 | 9,8) und P2(0,4 | 9,2) sind eingetragen.

Die Komponenten der Vektorfunktion $x(t)$, $y(t)$ sind gegeben durch:

$$x(t) = v_x \cdot t \quad \text{gleichförmig gradlinige Bewegung}$$

$$y(t) = y_0 - g \cdot t^2 \quad \text{gleichmäßig beschleunigte Bewegung}$$

Die Vektorfunktion lautet:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x \cdot t \\ y_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix} ;$$

Für drei konkrete Zeitpunkte $t_1=0,2 \text{ s}$; $t_2=0,4 \text{ s}$; $t_3=0,6 \text{ s}$

$$\vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} 0,2 \text{ m} \\ 9,8 \text{ m} \end{pmatrix} ; \quad \vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} 0,4 \text{ m} \\ 9,2 \text{ m} \end{pmatrix} ; \quad \vec{r}(t_3) = \begin{pmatrix} 0,6 \text{ m} \\ 8,2 \text{ m} \end{pmatrix}$$

Die zu den drei Zeitpunkten gehörenden Vektoren $\vec{r}(t_i)$ nennt man „**Ortsvektoren**“.

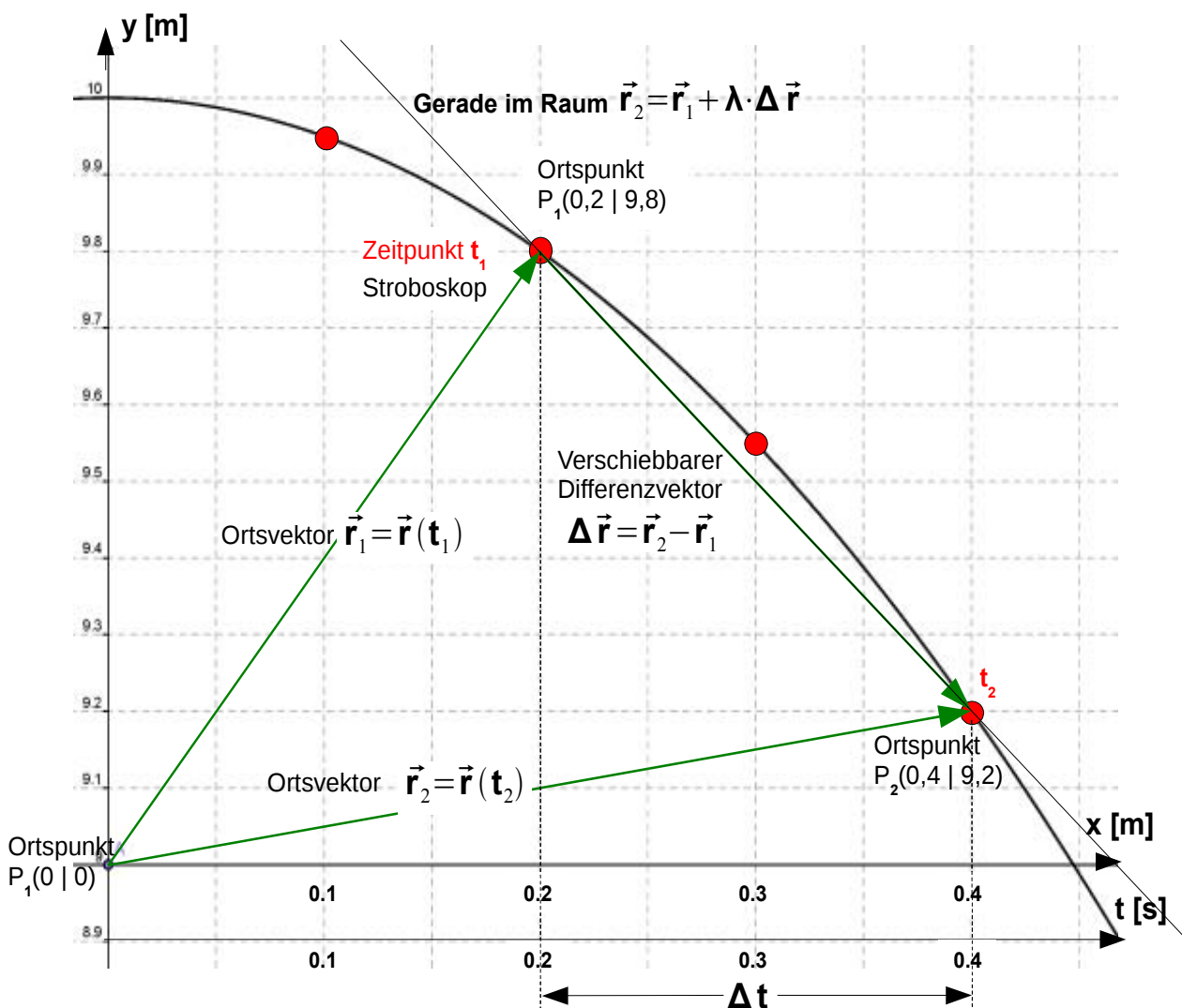


Abb 2.1.3.: Die Ortsvektoren beginnen im Nullpunkt eines festgelegten Koordinatensystems und zeigen auf den Koordinatenpunkt der Spur (hier $P_1(0,2|9,8)$ und $P_2(0,4|9,2)$). Der verschiebbare **Differenzvektor** ergibt sich aus der Subtraktion zweier Ortsvektoren und beschreibt die Richtung und den Abstand zweier Punkte auf der Spur der Kurve im Raum. Eine entsprechende Parameter-darstellung des Differenzvektors beschreibt eine Gerade im Raum.

Die gerichtete Größe kann zur Approximation des Kurvenverlaufes genutzt werden und durch Bezug auf die Zeiteinheit als vektorielle Größe der Geschwindigkeit (**Durchschnittsgeschwindigkeit**) definiert werden.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} +1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wie kommen wir jetzt von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit in vektorieller Schreibweise?

Ein heuristischer Ansatz:

Es wird zurückgegriffen auf die eingeführte Definition für die eindimensionalen Momentangeschwindigkeit (gerader Strecke). Sie ist festgelegt durch einen Differentiationsprozess der Zeit-Ort-Funktion $x(t)$ einer gradlinigen Bewegung.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Diese „eindimensionale“ **Momentangeschwindigkeit** wird übertragen auf die Vektorfunktion. Da die Komponenten $x(t)$, $y(t)$ in der Vektorfunktion unabhängig voneinander sind, kann der Differentiationsprozess auf die Vektorfunktion als Ganze angewendet werden, indem die Komponenten einzeln dem obigen Differentiationsprozess unterworfen werden.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta t} \vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta t} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

Für die beiden Bewegungstypen (gleichförmige gradlinige Bewegung und gleichmäßig beschleunigte Bewegung) ergibt sich die Vektorfunktion für die **Geschwindigkeit** als zeitliche Ableitung der Einzelkomponenten aus:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

konkret für den **waagerechten Wurf** zu:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ -g \cdot t \end{pmatrix}}$$

Für die beiden Zeitpunkte t_1 und t_2 ergeben die Geschwindigkeiten:

$$\vec{r}(t_1=0,2\text{s})=\begin{pmatrix} +1\text{m/s} \\ -2\text{m/s} \end{pmatrix} ; \quad \vec{r}(t_2=0,4\text{s})=\begin{pmatrix} +1\text{m/s} \\ -4\text{m/s} \end{pmatrix}$$

Die Darstellung des Geschwindigkeitsvektors erfolgt im Ortsdiagramm, da die Richtung einer physikalischen Größe eine örtliche Kategorie ist. Für die Länge des Geschwindigkeitsvektors muss eine neue Skalierung im Diagramm angebracht werden. Diese Skalierung muß das gleiche Maßstabsverhältnis y/x wie die Ortsvektoren aufweisen.

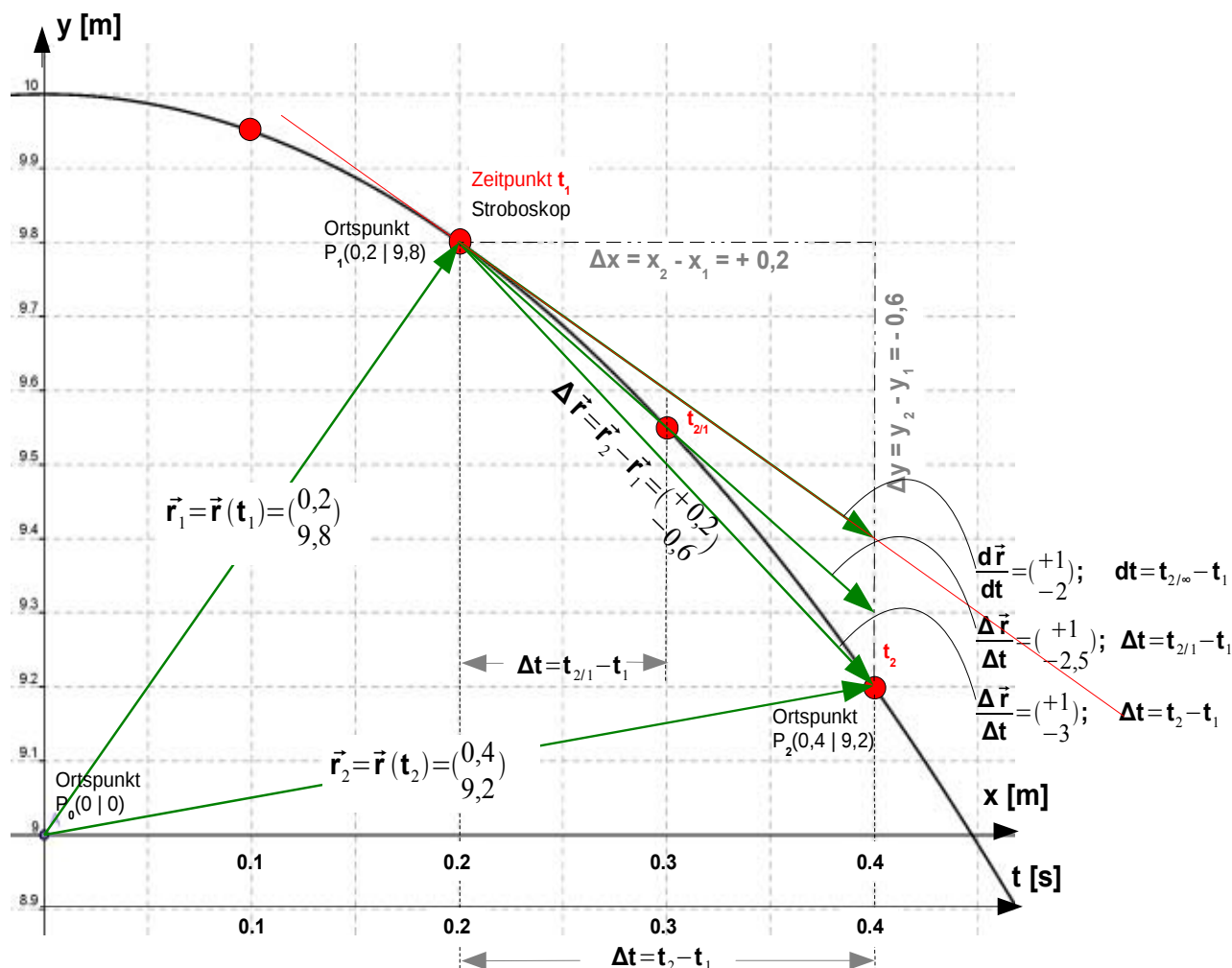


Abb.2.1.4: Darstellung des Geschwindigkeitsvektors im Ortsdiagramm. Interval- und Momentangeschwindigkeit. Der Differentiations- oder Übergangsprozess ist geometrisch angedeutet durch stetige Halbierung des Zeitintervalls Δt .

Die Geschwindigkeit $d\vec{r}/dt$ ist ein Schnelligkeit, mit der eine räumliche Distanz durchlaufen (verändert) wird (z.B. ein Läufer läuft 10 Sekunden auf 100 Meter). Der Quotient $d\vec{r}/dt$ ist quasi eine „Rate“, mit der eine Distanz (Länge) vermehrt oder verringert, d.h. verändert wird. Das ist aber nur die „halbe Wahrheit“. Die Änderung der Richtung ist ebenfalls in der Zeit anzugeben.

$d\vec{r}/dt$ steht für einen vektoriellen Differentiationsprozess und bedeutet physikalisch der Übergang von der Intervallgeschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit) zur vektoriellen Momentangeschwindigkeit. Geometrisch bedeutet er Übergang von der Sekantensteigung, einer Verbindung zweier Punkte (hier: $P_1(0,2|9,8)$ und $P_2(0,4|9,2)$) zur Tangentensteigung in einem Punkt (hier: $P_1(0,2|9,8)$).

Dieser Übergangsprozess findet sowohl räumlich als auch zeitlich auf der Bahnkurve statt ($\Delta \vec{r} \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow 0$). Die Zeitpunkte sind quasi die Wahrnehmungspunkte, gleichsam Ereignissen mit der Stroboskopkamera festgehalten, auf der Bahnkurve. Somit ergibt sich für den Quotienten $d\vec{r}/dt$ einen endlichen Vektorwert ($d\vec{r}/dt \neq \vec{0}$). Die Tangente an einem Ortspunkt gibt die momentane Richtung der momentanen Geschwindigkeit an und der Betrag des Vektors die Größe der Geschwindigkeit.

Anhang B: Schräger Wurf

Aufgabe:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ aus der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ und der wirkenden Gravitationskraft.

***Anleitung:** Gehen Sie von der Vektorfunktion (Beschleunigung) $\vec{a}(t)$ aus (2. Newtonsche Axiom) und nutzen Sie die Integration für jede Komponente einzeln.*

Anhang C: Gleichförmige Kreisbewegung

Aufgabe:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ aus der gegebenen Kreisbahngeschwindigkeit v_0 und der wirkenden Zentralkraft.

***Anleitung:** Gehen Sie von der Vektorfunktion (Beschleunigung) $\vec{a}(t)$ für die gleichförmige Kreisbewegung aus und nutzen Sie die Integration für jede Komponente einzeln (Siehe Seite 18).*